UNIVERSITAT D'ALACANT
Facultat de Ciències
Facultad de Ciencias

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO ACADÉMICO [2020-2021]

TÍTULO:

CÁLCULO EXTERIOR: APLICACIONES EN RELATIVIDAD GENERAL

AUTOR:

MANUEL MOLINA MUÑOZ

Resumen

En este trabajo estudiaremos el cálculo exterior, una herramienta muy importante de la Geometría Diferencial que es muy útil en Relatividad General. El objetivo será llegar a las ecuaciones de estructura de Cartan, que sirven para calcular la curvatura del espacio-tiempo mediante el calculo exterior sin coordenadas.

Para llegar a las ecuaciones de Cartan, iremos haciendo un repaso de todos los conceptos necesarios para llegar hasta ellas, desde los elementos más básicos, como las variedades topológicas, hasta las herramientas más desarrolladas, como el producto exterior y la diferencial exterior, ambas pertenecientes al cálculo exterior. Como la Geometría Diferencial es una materia muy extensa, iremos mostrando los resultados más importantes que nos lleven directamente al siguiente escalón hacia las ecuaciones de estructura de Cartan.

Lo que queremos conseguir con este trabajo es hacer una primera toma de contacto con la Geometría Diferencial y el cálculo exterior más que un estudio detallado de dichas disciplinas, así que no se hará demostraciones rigurosas de los resultados. Sí mostraremos algunos de los cálculos más básicos en los anexos, que servirán de ejemplo de cómo trabajar con los tensores y las herramientas más importantes del cálculo exterior.

Como aplicaciones a Relatividad General, mostraremos cómo es el procedimiento a seguir para calcular la curvatura de una variedad pseudo-Riemanniana a partir de las ecuaciones de Cartan, dado que el espacio-tiempo de la Relatividad General es una variedad pseudo-Riemanniana. Haremos los cálculos para diferentes métricas, algunas de ellas utilizadas para modelizar la curvatura del espacio tiempo.

Abstract

In this dissertation we will study exterior calculus, a powerful tool of Differential Geometry very useful in General Relativity. The main objective will be to arrive to Cartan's structural equations, wich are used to compute space-time's curvature without having to use coordinates.

We will be reviewing every concept required to get to Cartan's structural equations, from the most basic like topologic manifolds, to the most advanced tools, like exterior product or exterior derivative both part of exterior calculus. Differential Geometry is such a large subject that we will show only the main results that lead us right to the next step towards Cartan's structural equations.

The point of this dissertation will be to make a first approach to Differential Geometry and exterior calculus rather than an exhaustive study of these subjects, so we won't do any rigorous demonstration. Nevertheless, we will include some of the most basic computations in the annexes in order to show how to work with tensors in exterior calculus.

As applications to General Relativity we will show how to compute the curvature of a pseudo-Riemannian manifold using Cartan's structural equations. We will do the computations for different metrics, some of wich are used to space-time's curvature.

Índice

1. Introducción

La Geometría Diferencial es un área de las Matemáticas que estudia las variedades diferenciables y las aplicaciones entre ellas. Las variedades diferenciables serán el espacio sobre el cual desarrollaremos todos los resultados que nos van a ir llevando poco a poco a las ecuaciones de estructura de Cartan, y son un espacio topológico que localmente se parece al espacio euclídeo y sobre el cual se pueden extender las nociones del cálculo diferencial.

Lo primero que haremos será construir estas variedades diferenciables y ver cómo extender a ellas los conceptos del cálculo diferencial y del álgebra multilineal que vamos a necesitar para construir las formas diferenciales, que son los objetos con los que se trabaja en cálculo exterior.

A continuación estudiaremos los espacios tangentes y cotangentes, lo que nos permitirá definir vectores, covectores y tensores en las variedades diferenciables, así como campos vectoriales, covectoriales y tensoriales, y ver cuándo estos campos son diferenciables. En estos apartados aprenderemos a trabajar con estos objetos matemáticos y nos familiarizaremos con la notación de índices y subíndices covariantes y contravariantes.

Después, desarrollaremos todas las herramientas del cálculo exterior que vamos a necesitar para poder llegar a las ecuaciones de estructura de Cartan, que son principalmente el producto exterior y la diferencial exterior. Los objetos matemáticos que manipularemos con estas herramientas serán las formas diferenciales, campos tensoriales antisimétricos covariantes.

Una vez conocidas las herramientas que necesitamos del cálculo exterior, veremos los conceptos de conexión, torsión y curvatura. La conexión será una aplicación que nos permitirá trabajar con formas diferenciales de espacios tangentes distintos, pudiendo así definir las derivadas direccionales de campos vectoriales en variedades diferenciables. La torsión y la curvatura serán propiedades de la variedad que dependerán de la conexión.

El espacio-tiempo de la Relatividad General es una variedad pseudo-Riemanniana, así dedicaremos unas páginas a estudiar este tipo de variedad y sus propiedades. Estas variedades presentan un tensor métrico simétrico y no singular que hará las veces de producto interior y que nos permitirá jugar con los ordenes covariantes y contravariantes de los tensores. Una de las propiedades más importantes de este tipo de variedades es que cuenta con una conexión natural que es libre de torsión y tal que la derivada covariante de la métrica se anula, lo que simplifica los cálculos y nos lleva a resultados como las identidades de Bianchi. También nos permite definir otros tensores muy utilizados en

Relatividad General, como los tensores de Riemann, de Ricci y de Einstein.

Finalmente estudiaremos el formalismo de Cartan, que se basa en las 1-formas de la conexión, las 2-formas de la torsión y las 2-formas de la curvatura. En este último capítulo será en el que obtendremos las ecuaciones de estructura de Cartan, que usaremos para hallar las Identidades de Bianchi, pero principalmente para calcular la curvatura de una variedad pseudo-Riemanniana usando cálculo exterior sin coordenadas. Haremos estos cálculos para distintas métricas que nos permitirán entender cuando un espacio es plano, de curvatura constante o de curvatura irregular.

Respecto a la bibliografía, hasta la sección de formas diferenciales hemos seguido casi exclusivamente el libro *Introduction to smooth manifolds* de J. M. Lee [2], consultando puntualmente el libro *Geometrical methods of mathematical physics* de Bernard Schutz [4], el cual también usamos para repasar todos los conceptos de topología, aplicaciones y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$ previos a este trabajo. Después, para las secciones de conexiones y curvatura y formalismo de Cartan hemos seguido principalmente el libro *A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, HilbertSpace and Differential Geometry* de P. Szekeres [6], aunque para la primera de estas dos secciones también consultamos *Introduction to Riemannian Manifolds* de J.M. Lee [3] y para la segunda *General Relativity* de N. Straumann [5], ya que la definición de producto exterior que hace Szekeres es un poco distinta de la que hace Lee (que es la que hemos seguido) y para comprobar que los resultados obtenidos eran correctos tuvimos que comparar con libros que usaran el producto exterior definido como lo hicimos nosotros. Finalmente, para calcular el tensor de Ricci en la métrica del espacio-tiempo estático y con simetría esférica hemos seguido el *General Relativity* de M. Bartelmann [1].

2. Variedades diferenciables

2.1. Variedades topológicas

Definición 2.1 *Variedad topológica*

Sea M un espacio topológico, decimos que M es una variedad topológica de dimensión n si:

1. *M es un espacio de Hausdorff, es decir, para cualquier par de puntos distintos $p, q \in M, \exists U, V$ entornos de p y q, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$.*

2. *M cumple el segundo axioma de numerabilidad, es decir, la topología de M tiene una*

base numerable.

3. *Cada punto de M tiene un entorno homeomorfo a un entorno abierto de $\mathbb{R}^n$, es decir, M es localmente ecuclídeo de dimensión n.*

Teorema 2.2 *Invariancia topológica de la dimensión*

Una variedad topológica n-dimensional no puede ser homeomorfa a otra variedad topológica m-dimensional a no ser que $m = n$.

El ejemplo básico de variedad topológica es $\mathbb{R}^n$. Es un espacio de Hausdorff porque es un espacio métrico (usando bolas se satisface esta condición), y cumple el segundo axioma de numerabilidad porque el conjunto de todas las bolas abiertas con centros y radios racionales es una base numerable de su topología.

Proposición 2.3 *Subconjuntos abiertos y variedades*

Sea M una variedad topológica n-dimensional, todo conjunto abierto $U \subset M$ es una variedad topológica n-dimensional con la topología heredada de M.

Con heredada nos referimos a que la topología T de U debe ser una colección de subconjuntos de U, y por tanto de M. Sin embargo, T no puede ser igual que la topología de M ya que no todo subconjunto de M está contenido en U (a no ser que $U = M$). Así, la topología de U estará contenida en la topología de M.

La correspondencia entre los abiertos de una variedad topológica M de dimensión n y los abiertos de $\mathbb{R}^n$ la hacemos a través de las cartas coordenadas.

Definición 2.4 *Carta coordenada*

Sea M una variedad topológica n-dimensional y $U \subset M$ un abierto de M. Entonces, llamamos carta coordenada al par (U, φ), donde $\varphi : U \to V$ es un homeomorfismo de U sobre el abierto $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

A U lo llamaremos dominio coordenado y a la aplicación φ la llamaremos aplicación coordenada local. Las funciones de $\varphi \equiv (x^1, ..., x^n)$ son las coordenadas locales.

Las coordenadas locales son funciones reales dadas por:

$$\begin{aligned} x^i :\ & U \subset M \to \mathbb{R} \\ & p \longmapsto x^i(p) \end{aligned}$$

Cada punto de M estará en el dominio de al menos una carta, ya que por definición para cada punto de una variedad diferenciable M existe un entorno homeomorfo a algún abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.5 *Atlas*

Sea M una variedad topológica, llamamos atlas a cualquier colección de cartas cuyo dominio cubre todo M.

Las variedades no vienen con ningunas coordenadas predefinidas, así que podremos elegir las coordenadas de manera que simplifiquen el problema. Sin embargo, si queremos definir propiedades generales de la variedad no podremos trabajar con ningún sistema de coordenadas concreto, pues esa propiedad debe ser independiente del sistema de coordenadas.

2.2. Estructuras diferenciables

Definición 2.6 *Aplicación transición*

Sea M una variedad topológica n-dimensional y (U, φ) y (V, ψ) dos cartas tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Se llama aplicación transición de φ a ψ a la aplicación $\tau \equiv \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$.

Como es una composición de homeomorfismos, se trata de un homeomorfismo.

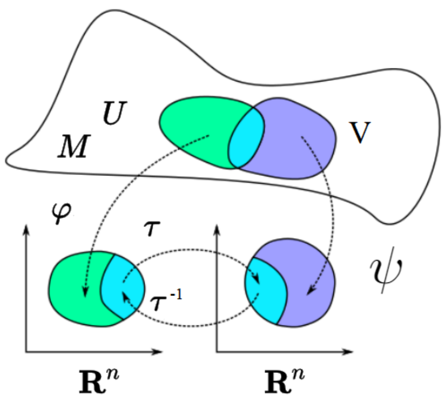

Figura 1: *Aplicación transición entre dos cartas de una variedad topológica*

Definición 2.7 *Cartas compatibles*

Dos cartas (U, φ) y (V, ψ) se dicen compatibles si se cumple cualquiera de las dos siguientes condiciones:

1. $U \cap V = \emptyset$
2. $\psi \circ \varphi^{-1}$ *es un difeomorfismo*

Definición 2.8 *Atlas diferenciable*

Sea M una variedad topológica y $\mathcal{A}$ un atlas de M. Si cada par de cartas del atlas son compatibles, diremos que el atlas es diferenciable.

Lo que buscamos es definir la estructura diferenciable en M dando un atlas diferenciable de manera que una función $f : M \to \mathbb{R}$ sea diferenciable en M si la función $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable para cada carta (U, φ) del atlas. Sin embargo, puede haber varios atlas que otorguen la misma estructura diferenciable a M, es decir, que determinen la misma colección de funciones diferenciables en M. Así, tomaremos el atlas maximal, al que llamaremos atlas completo.

Definición 2.9 *Estructura diferenciable en M*

Sea M una variedad topológica, una estructura diferenciable en M es un atlas diferenciable maximal, es decir, un atlas que diferenciable que no está contenido en un atlas mayor.

Si pedimos que las cartas del atlas sean tales que $\psi \circ \varphi^{-1}$ y su inversa sean de clase $\mathcal{C}^k$, se dirá que la estructura será de clase $\mathcal{C}^k$. Nosotros trabajaremos, en general, con estructuras $\mathcal{C}^\infty$.

Definición 2.10 *Variedad diferenciable*

Se llama variedad diferenciable al par (M, $\mathcal{A}$), donde M es una variedad topológica y $\mathcal{A}$ es una estructura diferenciable en M.

2.3. Aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables

La diferenciabilidad de aplicaciones entre variedades diferenciables se apoya en la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.11 *Aplicación diferenciable*

Sean M y N variedades diferenciables, una aplicación $F : M \to N$ se dice diferenciable si para cada $p \in M$ existen dos cartas diferenciables (U, φ) y (V, ψ), con $p \in U \subseteq M$ y $F(p) \in V \subseteq N$, tales que $F(U) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable.

A la aplicación $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ la llamamos representación coordenada de F.

Las representaciones coordenadas de las aplicaciones son con lo que trabajamos en la práctica. Lo que hacemos es elegir mediante las cartas unas coordenadas que nos "lleven" los dominios de interés a $\mathbb{R}^n$, y ahí ya trabajamos con funciones $\hat{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que son para las cuales están definidos los conceptos de diferenciabilidad. Así, si la representación coordenada $\hat{F}$ es diferenciable para cualquier par de cartas de M y de N tales que $p \in U \subseteq M$ y $F(p) \in V \subseteq N$ con $F(U) \subseteq V$, la aplicación F será diferenciable.

Un ejemplo más sencillo puede ser el de las funciones $f : M \to \mathbb{R}^m$, siendo M una variedad diferenciable de dimensión n. Para M elegimos una carta cualquiera (U, φ), y para $\mathbb{R}^m$ la carta $(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m})$. Así, ahora podemos trabajar con la función real

$$Id_{\mathbb{R}^m} \circ f \circ \varphi^{-1} \equiv f \circ \varphi^{-1} = \hat{f} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Si $\hat{f}$ es diferenciable independientemente de la carta de M elegida, entonces f será diferenciable. El conjunto de funciones $f : M \to \mathbb{R}$ k veces diferenciables lo denotaremos por $\mathcal{C}^k(M)$.

Proposición 2.12 *Sean M, N y P variedades diferenciables, se cumple que:*

1. *Las aplicaciones constantes $c : M \to N$ son diferenciables.*
2. *Las aplicaciones identidad de cada variedad son diferenciables.*
3. *Si $F : M \to N$ y $G : N \to P$ son diferenciables, $G \circ F : M \to P$ es diferenciable.*

Para cerrar este apartado, definimos los difeomorfismos entre variedades y mostramos un par resultados útiles.

Definición 2.13 *Difeomorfismo entre variedades diferenciables*

Sean M y N dos variedades diferenciables, se dice que $F : M \to N$ es un difeomorfismo si es diferenciable con inversa diferenciable.

Si existe un difeomorfismo entre M y N, se dice que M y N son difeomorfos.

Proposición 2.14 *La composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.*

Teorema 2.15 *Invariancia de de la dimensión bajo difeomorfismos*

Una variedad diferenciable no vacía de dimensión m sólo puede ser difeomorfa a una variedad diferenciable de dimensión n si $m = n$.

3. Espacios tangentes

Supongamos que queremos escribir una curva en el espacio Euclídeo. Lo que debemos hacer es dar una serie de puntos conectados, y para ello debemos dar sus coordenadas. Esto lo podemos hacer parametrizando la curva, que será parametrizar las coordenadas de los puntos que conforman la curva. Si usamos un parámetro t, obtendremos curvas parametrizadas:

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto C(t) = x^\alpha(t) e_\alpha \end{aligned}$$

con $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y las coordenadas son funciones:

$$\begin{aligned} x^\alpha : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x^\alpha(t) \end{aligned}$$

Podemos definir el vector tangente a la curva en el punto $C(t_0) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$v = \left.\frac{dC(t)}{dt}\right|_{t_0} = \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right|_{t_0} e_\alpha$$

De esta manera, podremos hacer una asociación entre vectores tangentes y derivadas.

3.1. Vectores tangentes en el espacio Euclídeo

Definición 3.1 *Espacio tangente a* $\mathbb{R}^n$

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ *un punto cualquiera, se define el espacio tangente,* $\mathbb{R}^n_a$*, como el conjunto:*

$$\mathbb{R}^n_a \equiv \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) / v \in \mathbb{R}^n\}$$

Los elementos de $v_a \in \mathbb{R}^n_a$ *serán los vectores tangentes a* $\mathbb{R}^n$ *en el punto* a*, es decir, los vectores que tienen como origen* a *y como final* $(a + v)$ *en* $\mathbb{R}^n_a$*.*

El conjunto $\mathbb{R}^n_a$ es un espacio vectorial real con la suma y el producto por escalar definidos como:

$$v_a + w_a = (v + w)_a; \;\; \lambda(v_a) = (\lambda v)_a$$

De hecho, $\mathbb{R}^n_a$ y $\mathbb{R}^n$ son iguales, solo que sus orígenes no están, en general, en el mismo punto (estarían relacionados mediante una traslación, que es un isomorfismo). Esto en general no será así, aunque podremos establecer un isomorfismo entre la variedad y sus espacios tangentes. Un ejemplo más intuitivo sería el espacio tangente a la superficie de una esfera, que será un plano:

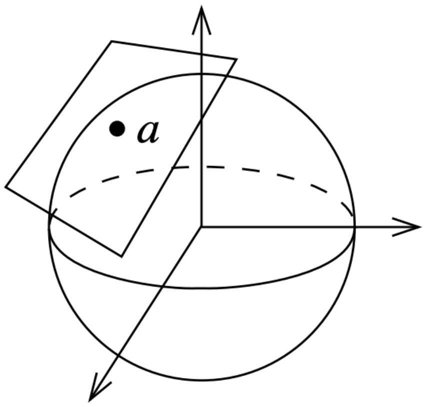

Figura 2: *Espacio tangente a la superficie de la esfera en uno de sus puntos*

Podemos relacionar los vectores tal y como los conocemos (módulo y dirección) con las derivadas direccionales, ya que cada vector tangente v_a se puede asociar a la derivada direccional de una función en el punto punto a con dirección v, $D_{v_a} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$:

$$D_{v_a} f = [D_v f](a) = \frac{d}{dt}[f(a + vt)]\bigg|_{t=0} = \frac{df}{dt}(a)$$

que es lineal en $\mathbb{R}$ y cumple la regla del producto de derivadas.

Dado un sistema de coordenadas $\{x^i\}$ de $\mathbb{R}^n$, esto también se puede expresar como:

$$D_{v_a} f = [D_v f](a) = v^i \frac{df}{dx^i}(a)$$

con $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ las componentes del vector tangente resultante, que es lo que obtuvimos cuando derivábamos una curva parametrizada.

Definición 3.2 *Derivada en un punto*

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ un punto cualquiera, decimos que la aplicación $w : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ es una derivada en a si es tal que:

1. *w es lineal en $\mathbb{R}$.*

2. *$w(fg) = f \cdot w(g) + g \cdot w(f)$, con la expresión evaluada en a.*

Consideremos el conjunto de todas las derivadas de funciones de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ en el punto $a \in \mathbb{R}^n$, denotado por $T_a\mathbb{R}^n$. Este conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y el producto por escalar definidos por:

$$(w_1 + w_2)f = w_1 f + w_2 f; \ (\lambda w)f = \lambda(wf)$$

Proposición 3.3 *Sea $a \in \mathbb{R}^n$, se verifica:*

1. *Para cada vector tangente $v_a \in \mathbb{R}^n_a$, la aplicación $D_{v_a} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$D_{v_a} f = [D_v f](a) = \frac{d}{dt}[f(a + vt)]\Big|_{t=0} = \frac{df}{dt}(a)$$

   es una derivada en a.

2. *Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n_a$ y $T_a\mathbb{R}^n$ son isomorfos a través de la aplicación:*

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}^n_a &\to T_a\mathbb{R}^n \\ v_a &\longmapsto D_{v_a} \end{aligned}$$

Este resultado es el que estabamos buscando, pues establece un isomorfismo entre el espacio de vectores tangentes a $\mathbb{R}^n$ en un punto y el espacio de las derivadas de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ en dicho punto. Ahora, debemos extender este resultado a las variedades diferenciables generales.

Corolario 3.4 *Sea $a \in \mathbb{R}^n$, las n derivadas:*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_a$$

definidas por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

forman una base de $T_a\mathbb{R}^n$, cuya dimensión será n.

Por comodidad, en algunos desarrollos usaremos como notación $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_a = \partial_i\big|_a$

3.2. Vectores tangentes en variedades diferenciables

Definición 3.5 *Derivada en un punto de una variedad diferenciable*

Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$, llamamos derivada en p a toda aplicación lineal $v : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tal que $\forall f, q \in \mathcal{C}^\infty(M)$ verifica:

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf$$

Definición 3.6 *Espacio tangente a una variedad diferenciable*

Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$, llamamos espacio tangente de M en p, T_pM, al conjunto de las derivadas en p. Además, T_pM es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar definidos por:

$$(v_1 + v_2)f = v_1 f + v_2 f;\ (\lambda v_1)f = \lambda(v_1 f)$$

con $v_1, v_2 \in T_a\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Los elementos de T_pM son los vectores tangentes en el punto p.

3.3. Diferencial de una aplicación diferenciable

A continuación, veamos cómo se relacionan los espacios tangentes de una variedad diferenciable con los espacios tangentes de otra variedad diferenciable.

Definición 3.7 *Diferencial de una aplicación*

Sean M y N dos variedades diferenciables y $F : M \to N$ una aplicación diferenciable, para cada $p \in M$ definimos la diferencial de F en p como la aplicación:

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

tal que para $v \in T_pM$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, se tiene:

$$\begin{aligned} dF_p(v) :\ & \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathbb{R} \\ & f \longmapsto \big(dF_p(v)\big)(f) = v(f \circ F) \end{aligned}$$

Proposición 3.8 *Propiedades de las diferenciales*

Sean M, N y P variedades diferenciables, $F : M \to N$ y $G : N \to P$ aplicaciones diferenciables y $p \in M$ un punto cualquiera de M. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

1. *$dF_p : T_pM \to T_pN$ es lineal.*

2. *$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_{G\circ F(p)}M \to T_pP$.*

3. *$d(Id_M)_p = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.*

4. *Si F es un difeomorfismo, entonces $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo y $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.*

Proposición 3.9 *Sea M una variedad diferenciable, $U \subseteq M$ un abierto y $\iota : U \to M$ la aplicación inclusión, que manda cada $p \in U$ a M, tratando a p como un elemento de M. Entonces, para cada $p \in U$ se tiene que la diferencial $d\iota : T_pU \to T_pM$ es un isomorfismo.*

Proposición 3.10 *Dimensión del espacio tangente*

Si M es una variedad diferenciable de dimensión n, el espacio tangente T_pM en el punto p es un espacio vectorial de dimensión n.

Proposición 3.11 *Espacio tangente a un espacio vectorial*

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con estructura de variedad diferenciable. Entonces, para cada $a \in V$, la aplicación:

$$\begin{aligned} D_a : V &\to T_aV \\ v &\longmapsto D_{v_a} \end{aligned}$$

con D_{v_a} definida por:

$$\begin{aligned} D_{v_a} :\ & \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathbb{R} \\ & f \longmapsto D_{v_a}f = [D_vf](a) = \frac{d}{dt}[f(a+vt)]\bigg|_{t=0} = \frac{df}{dt}(a) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de V a T_aV.

3.4. Cálculo con coordenadas

Supongamos que tenemos una variedad diferenciable M y una carta (U,φ) de M. Como $\varphi : U \subset M \to \varphi(U) \in \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. Por el corolario 3.5,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\varphi(p)}, ..., \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{\varphi(p)}$$

forman una base de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. Pero como T_pM y $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ son isomorfos a través de $d\varphi_p$, entonces

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = (d\varphi_p)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right)$$

es una base de T_pM, pues los isomorfismos transforman bases en bases.

Como $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$, es una derivada en p, actuará sobre funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \left\{d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right)\right\}(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p})$$

con $\hat{f} = f \circ \varphi$ y $\hat{p} = (p_1, ..., p_n) = \varphi(p)$ las representaciones coordenadas de f y de p, respectivamente. A los vectores $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$ los llamamos vectores coordenados en p asociados al sistema de coordenadas dado por la carta (U, φ).

Como los vectores $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$ son una base de T_pM, podemos expresar cualquier $v \in T_pM$ como:

$$v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = v^i \partial_i|_p$$

Diremos que los $\partial_i|_p$ son una base coordenada de T_pM, y los números $(v^1, ..., v^n)$ son las componentes de v respecto a la base coordenada. Para encontrar la j-ésima componente, hacemos:

$$v(x^j) = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = v^j$$

Ahora, supongamos que existen dos cartas (U, φ) y (V, ψ) tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Las coordenadas de φ serán x^i y las de ψ serán $\bar{x}^j$. Si tomamos un punto $p \in U \cap V$, cualquier vector tangente a M en p se podrá escribir en la base $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ o en la base $\left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\right|_p$. Veamos entonces la relación entre estas dos bases.

La aplicación transición $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ pasa del sistema de coordenadas x^i al $\bar{x}^j$ y se puede escribir como:

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x) = \left(\bar{x}^1(x^i), ..., \bar{x}^n(x^i)\right)$$

La aplicación transición es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, así que la matriz de transformación de las bases coordenadas será el jacobiano de la transformación de coordenadas, $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que estamos en $\mathbb{R}^2$ y tomamos las cartas $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ y $(\mathbb{R}^2, \psi)$, con $\varphi = (r, \theta)$ y $\psi = (x, y)$. Las aplicaciones transición será:

$$\begin{aligned} \tau \equiv \psi \circ \varphi^{-1}(r, \theta) &= \big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \tau^{-1} \equiv \varphi \circ \psi^{-1}(x, y) &= \big(r(x,y), \theta(x,y)\big) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Expresemos las base dada por φ en función de la base dada por ψ:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_p &= \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p = \cos\theta\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \sin\theta\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p = -r\sin\theta\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + r\cos\theta\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \end{aligned}$$

Cada vector coordenado $\partial_i|_p$ indica la derivada en el punto p respecto de la coordenada x^i manteniendo las demás constantes. Geométricamente, esto significa que el vector coordenado $\partial_i|_p$ apunta en la dirección en la cual únicamente varía x^i.

Además, como el vector se puede expresar en las dos bases, debe cumplirse:

$$v = v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \bar{v}^j\left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p$$

y si aplicamos la transformación de coordenadas se llega a que:

$$v^i\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})\left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p = \bar{v}^j\left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p \implies v^i\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) = \bar{v}^j$$

3.5. Fibrado tangente

Hasta ahora todo lo que hemos visto era a nivel local. Sin embargo, podemos agrupar todos los espacios tangentes de una variedad en un sólo conjunto: el fibrado tangente. Esto nos servirá para obtener resultados globales.

Definición 3.12 *Fibrado tangente*

Sea M una variedad diferenciable, llamamos fibrado tangente de M, denotado por TM, a la unión disjunta de todos los espacios tangentes a cada punto de M:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

El fibrado tangente tiene una aplicación asociada, llamada aplicación proyección, que lleva cada vector $v \in TM$ al punto en el cual es tangente a la variedad:

$$\begin{aligned} \pi : \ TM &\to M \\ v &\longmapsto p \end{aligned}$$

de manera que el vector v será tangente a p, con lo que $v \in T_pM$.

Proposición 3.13 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, su fibrado tangente tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión 2n. Respecto a esta estructura, la proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.*

La misma idea que nos llevó a definir el fibrado tangente nos lleva a definir la diferencial global.

Definición 3.14 *Diferencial global*

Sean M y N dos variedades diferenciables y $F : M \to N$ una aplicación diferenciable, llamamos diferencial global a la aplicación $dF : TM \to TN$. La restricción de dF sobre T_pM es $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$.

Proposición 3.15 *Si $F : M \to N$ es una aplicación diferenciable, entonces su diferencial global $dF : TM \to TN$ también es una aplicación diferenciable.*

Corolario 3.16 *Propiedades de la diferencial global.*

Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ dos aplicaciones diferenciables:

1. $d(G \circ F) = dG \circ dF$

2. $d(Id_M) = Id_{TM}$

3. *Si F es un difeomorfismo, entonces $dF : TM \to TN$ también es un difeomorfismo, y $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$*

3.6. Campos vectoriales

Por último, definiremos los campos vectoriales y algunas propiedades importantes.

Definición 3.17 *Campo vectorial*

Sea M una variedad diferenciable, un campo vectorial en M es una aplicación continua $X : M \to TM$ tal que:

$$\pi \circ X = Id_M$$

Vemos que en el fondo no es más que una aplicación que a cada punto $p \in M$ le asocia un vector del espacio tangente a M en p, $v \in T_pM$. Sea (U, φ) una carta cualquiera de M, con $\varphi = (x^1, ..., x^n)$, podemos escribir X en U como:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y en cada $p \in U \subset M$ tendremos:

$$X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

donde $X^i : U \subset M \to \mathbb{R}$ son las componentes de X en la base coordenada dada por la carta φ.

Proposición 3.18 *Criterio de diferenciabilidad de campos vectoriales*

Sea M una variedad diferenciable y $X : M \to TM$ un campo vectorial. Entonces, diremos que X es diferenciable si , y solo si las componentes X^i son diferenciables para cada carta $\left(U, \{x^i\}_{i=1}^n\right)$, es decir, si $X^i \circ \varphi^{-1} = \hat{X}^i : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable independientemente de la carta escogida.

Al conjunto de los campos vectoriales diferenciables en M lo denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

Un ejemplo de campo vectorial es el i-ésimo campo vectorial coordenado, que dada una carta $\left(U, \{x^i\}_{i=1}^n\right)$ de M, asigna a cada $p \in M$ el i-ésimo vector coordenado de la base coordenada evaluado en dicho punto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} : M &\to TM \\ p &\longmapsto \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \end{aligned}$$

Aplicado sobre un punto p, el campo vectorial nos devuelve un elemento de T_pM, es decir, una derivada que actúa sobre funciones $\mathcal{C}^\infty(M)$. Así, podremos escribir la actuación de un campo vectorial v sobre una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ en una carta cualquiera $\big(U, \{x^i\}_{i=1}^n\big)$ como:

$$v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

obteniendo así la derivada direccional de f en la dirección del campo vectorial v.

Uno de los operadores más importantes asociados a campos vectoriales es el paréntesis de Lie que se define como:

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot] : \; \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (v,u) &\longmapsto [v,u] \end{aligned}$$

En una carta cualquiera $\big(U, \{x^i\}_{i=1}^n\big)$, podremos escribir:

$$[v,u]^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$$

Una propiedad muy importante del paréntesis de Lie es que los campos vectoriales coordenados cumplen:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

4. Espacios cotangentes

4.1. Covectores

Definición 4.1 *Covector*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, se llama covector a cualquier aplicación lineal $\omega : V \to \mathbb{R}$.

Definición 4.2 *Espacio vectorial dual*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, el conjunto de todos los covectores de V es también un espacio vectorial real con la suma y el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ usuales. Lo llamamos espacio dual de V, y lo denotamos por V.*

Proposición 4.3 *Base dual*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y $\{e_1, ..., e_n\}$ una base cualquiera de V. Si tomamos los covectores $\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n \in V^*$ definidos por:

$$\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$$

entonces $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ es una base de V^*, llamada base dual. De esto se deduce que dim $V =$ dim V^*.

De esta manera si tenemos $v = (v^1, ..., v^n) \in V$ expresada en una base de V y $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in V^*$ en la base dual, se cumple:

$$\varepsilon^i(v) = v^j \varepsilon^i(e_j) = v^i$$
$$e_i(\omega) = \omega_j e_i(\varepsilon^j) = \omega_j$$
$$\langle \omega, v \rangle = \omega(v) = \omega_j v^i \varepsilon^j(e_i) = \omega_i v^i = v(\omega) = \langle v, \omega \rangle$$

Otro concepto importante de los espacios duales es el segundo espacio dual, $V^{**} = (V^*)^*$. Para cada espacio vectorial real V existe algún isomorfismo $\xi : V \to V^{**}$ independiente de la base del espacio, de manera que podemos identificar V^{**} con V.

Además, si $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base de V y $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ la base dual de V^* tal que $\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$, la base $\{e_1, ..., e_n\}$ también será la base dual de $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n\}$ y base de $V^{**} = V$ pues cumple que $\langle e_i, \varepsilon^j \rangle = \delta^j_i$.

4.2. Covectores tangentes en variedades diferenciables

Definición 4.4 *Espacio cotangente*

Sea M una variedad diferenciable, para cada $p \in M$ definimos el espacio cotangente de M en p como el espacio dual de T_pM:

$$T^*_pM = (T_pM)^*$$

Los elementos de T^*_pM son los covectores tangentes a M en p, o simplemente covectores en p.

Si M es una variedad diferenciable, en una carta cualquiera $\left(U, \{x^i\}^n_{i=1}\right)$ tendremos una base coordenada $\partial_i|_p$ de T_pM con la que podremos formar una base dual $(\lambda^i\big|_p)$ de T^*_pM. Así, cualquier $\omega \in T^*_pM$ se podrá representar como:

$$\omega = \omega_i \lambda^i\big|_p; \quad \omega_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)$$

Supongamos que $\left(U, \{\bar{x}^i\}_{i=1}^n\right)$ es otra carta cuyo dominio contiene a p. La base de T_pM en esas coordenadas será $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\big|_p\right)$, y la dual de T_p^*M que podemos obtener a partir de ella será $(\bar{\lambda}^i\big|_p)$. Como ω es el mismo covector en ambas coordenadas, tendremos:

$$\omega = \omega_i \lambda^i\big|_p = \bar{\omega}_j \bar{\lambda}^j\big|_p$$

así que:

$$\omega_i = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \omega\left(\left.\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p\right) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(p)\omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p\right)$$

$$\omega_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(p)\bar{\omega}_j$$

4.3. Campos covectoriales

Definición 4.5 *Fibrado cotangente*

Sea M una variedad diferenciable, llamamos fibrado cotangente de M, denotado por T^*M, a la unión disjunta de todos los espacios cotangentes a cada punto de M:

$$T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_p^*M$$

El fibrado cotangente tiene una aplicación asociada, llamada aplicación proyección, que lleva cada covector $\omega \in T^*M$ al punto en el cual es tangente a la variedad:

$$\pi: \ T^*M \to M$$
$$\omega \longmapsto p$$

de manera que el covector ω será tangente a p, con lo que $\omega \in T_p^*M$.

Como hemos dicho antes, si M es una variedad diferenciable, dada una carta cualquiera $\left(U, \{\bar{x}^i\}_{i=1}^n\right)$ tendremos una base coordenada $\partial_i|_p$ de T_pM con la que podremos formar una base $(\lambda^i\big|_p)$ de T_p^*M. Esto define las aplicaciones $\lambda^i : U \subset M \to T^*M$, llamadas campos covectoriales coordenados (análogos a los campos vectoriales coordenados).

Así, podemos definir los campos covectoriales o 1-formas, que serán aplicaciones que a cada punto p de una variedad diferenciable M le asigne un covector ω tangente a M en ese punto, $\omega \in T_p^*M$.

Definición 4.6 *Campo covectorial*

Sea M una variedad diferenciable, un campo covectorial o 1-forma en M es una aplicación continua $\omega : M \to T^*M$ tal que:

$$\pi \circ \omega = Id_M$$

Sea M una variedad diferenciable y $\left(U, \{\bar{x}^i\}_{i=1}^n\right)$ una carta cualqueira de M, podemos expresar el campo covectorial como:

$$\omega = \omega_i \lambda^i; \quad \omega_i = \omega(\partial_i)$$

donde $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ son las componentes de ω. Para cada punto $p \in U$ se escribirá:

$$\omega_{|p} = \omega_i(p)\lambda^i\Big|_p; \quad \omega_i(p) = \omega_{|p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)$$

Además, si X es un campo vectorial podemos definir la función $\omega(X) : M \to \mathbb{R}$ como:

$$\omega(X)(p) = \langle \omega, X \rangle(p) = \langle \omega_{|p}, X_{|p} \rangle = \omega_i(p) X^i(p)$$

que en función de las bases ∂_i y λ^i en el dominio U se representa:

$$\omega(X) = \omega_i X^i$$

Proposición 4.7 *Criterio de diferenciabilidad para campos covectoriales*

Sea M una variedad diferenciable y $\omega : M \to \mathbb{R}$ un campo covectorial. Entonces, diremos que ω es diferenciable si , y solo si las componentes ω_i son diferenciables para cada carta $\left(U, \{x^i\}_{i=1}^n\right)$, es decir, si $\omega_i \circ \varphi^{-1} = \hat{\omega}^i : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable independientemente de la carta escogida.

4.4. Diferencial

A continuación, veremos la diferencial tratada como un campo covectorial.

Definición 4.8 *Diferencial*

Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, se define la diferencial de f como el campo covectorial:

$$\begin{aligned} df_p : T_pM &\to \mathbb{R} \\ v &\longmapsto df_p(v) = vf \end{aligned}$$

Proposición 4.9 *Sea f una función diferenciable, su diferencial será un campo covectorial diferenciable.*

Para ver que forma tiene la diferencial, supongamos una variedad diferenciable M, una carta cualquiera $\left(U, \{\bar{x}^i\}_{i=1}^n\right)$ y una función $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable. Como base coordenada tendremos ∂_i y como base dual λ^i. Por ser una 1-forma, la diferencial se puede escribir como $df_p = A_i(p)\lambda^i|_p$, con $A_i : U \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$A_i(p) = df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

así que nos queda la expresión:

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p; \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\lambda^i$$

Si hacemos la diferencial de las funciones coordendas:

$$dx^j_p = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)\lambda^i|_p = \delta^j_i\lambda^i|_p = \lambda^j|_p$$

vemos que los campos covectoriales coordenados son las diferenciales de las funciones coordenadas. Con todo esto, la diferencial de la función nos queda como:

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p; \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

Proposición 4.10 *Propiedades del diferencial*

Sea M una variedad diferenciable y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Se cumple que:

1. *Si a y b son constantes, entonces $d(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot df + b \cdot dg$.*

2. $d(fg) = g \cdot df + f \cdot dg$.

3. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$ *si* $g \neq 0$.

4. *Si* $J \subseteq \mathbb{R}$ *es un intervalo que contiene la imagen de* f*, y* $h : J \to \mathbb{R}$ *es una función diferenciable, entonces* $d(h \circ f) = (dh \circ f) \cdot df$.

5. *Si* f *es constante, entonces* $df = 0$

5. Tensores

Definición 5.1 *Aplicación multilineal*

Sean $V_1, ..., V_k$ *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{R}$*, llamaremos aplicación multilineal a toda aplicación* $F : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ *tal que*

$$F(v_1, ..., a \cdot v_i + b \cdot u_i, ...v_k) = a \cdot F(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + b \cdot F(v_1, ..., u_i, ..., v_k)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$*,* $v_j \in V_j$ $\forall j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ..., k$ *y* $u_i, v_i \in V_i$.

Proposición 5.2 *Sean* $V_1, ..., V_k$ *y* W *espacios vectoriales sobre un cuerpo* $\mathbb{R}$*, el conjunto de todas las aplicaciones multilineales de* $V_1, ..., V_k \to W$ *es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar usuales, y lo denotamos por* $L(V_1, ..., V_k; W)$*. Sean* $F, G \in L(V_1, ..., V_k; W)$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *se cumple:*

1. $(F + G)(v_1, ..., v_k) = F(v_1, ..., v_k) + G(v_1, ..., v_k)$.

2. $(a \cdot F)(v_1, ..., v_k) = a \cdot F(v_1, ..., v_k)$

Definición 5.3 *Producto tensorial*

Sean $V_1, ..., V_k, W_1, ..., W_l$ *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{R}$*, y las aplicaciones multilineales* $F \in L(V_1, ..., V_k; \mathbb{R})$ *y* $G \in L(W_1, ..., W_l; \mathbb{R})$*. Se define el producto tensorial de* F *por* G*, denotado por* $F \otimes G$*, como la función:*

$$F \otimes G : V_1 \times \cdots \times V_k \times W_1 \times \cdots \times W_l \to \mathbb{R}$$

tal que:

$$F \otimes G(v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_l) = F(v_1, ..., v_k) \cdot G(w_1, ..., w_l)$$

De la multilinealidad de F *y* G *se deduce que* $F \otimes G \in L(V_1, ..., V_k, W_1, ..., W_l; \mathbb{R})$

Proposición 5.4 *Base del espacio de las aplicaciones multilineales*

Sean $V_1, ..., V_k$ k espacios vectoriales reales de dimensión $n_1, ..., n_k$, respectivamente. Si $\{e_1^{(j)}, ..., e_{n_j}^{(j)}\}$ es una base de V_j y $\{\varepsilon^1_{(j)}, ..., \varepsilon^{n_j}_{(j)}\}$ la base dual de V_j^*, entonces el conjunto:

$$\mathcal{B} = \left\{\varepsilon^{i_1}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}_{(k)} / 1 \leq i_1 \leq n_1, ..., 1 \leq i_k \leq n_k\right\}$$

es una base de $L(V_1, ..., V_k; \mathbb{R})$, cuya dimensión es $n_1 \cdots n_k$.

Así, sea $F \in L(V_1, ..., V_k; \mathbb{R})$ podremos escribir:

$$F = F_{i_1,...,i_k} \varepsilon^{i_1}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}_{(k)}; \quad F_{i_1,...,i_k} = F\big(e^{(1)}_{i_1}, ..., e^{(k)}_{i_k}\big); \quad 1 \leq i_j \leq n_j$$

Por ejemplo, si tenemos dos espacios vectoriales V_1 de base dual $\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n$ y V_2 de base dual $\lambda^1, ..., \lambda^m$, $F \in L(V_1, V_2; \mathbb{R})$ se escribirá:

$$F = F_{\alpha\beta} \varepsilon^\alpha \otimes \lambda^\beta$$

Definición 5.5 *Tensor*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, y $k, l \in \mathbb{N}$, llamamos tensor de orden (k, l) a la aplicación multilineal:

$$\hat{T} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l\ copias} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k\ copias} \to \mathbb{R}$$

El espacio de los tensores de rango (k, l) se denota por $T^{(k,l)}(V)$, y su dimensión será $n^{(k+l)}$.

Algunos ejemplos importantes son:

- $T^{(0,0)}(V) = \mathbb{R}$, es decir, los escalares son tensores de orden 0.
- $T^{(k,0)}(V) \equiv T^k(V)$ es el espacio de los tensores contravariantes de orden k. Sus elementos son aplicaciones $\hat{T} : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k\ copias} \to \mathbb{R}$.
- $T^{(0,l)}(V) \equiv T^l(V^*)$ es el espacio de los tensores covariantes de orden l. Sus elementos son aplicaciones $\hat{T} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l\ copias} \to \mathbb{R}$.

Aplicando lo que hemos visto anteriormente, si V es un espacio vectorial real de dimensión n con base $\{e_i\}_{i=1}^n$ y base dual $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$, un tensor cualquiera $\hat{T} \in T^{(k,l)}(V)$ se podrá escribir como:

$$\hat{T} = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l} e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_k} \otimes \varepsilon^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{\beta_l}; \;\; T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l} = \hat{T}(\varepsilon^{\alpha_1}, ..., \varepsilon^{\alpha_k}, e_{\beta 1}, ..., e_{\beta l})$$

con $1 < \alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l < n$. Por ejemplo, si V es de dimensión n y $\hat{T} \in T^{(2,1)}(V)$, se escribe:

$$\hat{T} = T^{\alpha\beta}_{\gamma} e_\alpha \otimes e_\beta \otimes \varepsilon^\gamma; \;\; T^{\alpha\beta}_{\gamma} = \hat{T}(\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\beta, e_\gamma)$$

con $1 < \alpha, \beta, \gamma < n$.

5.1. Tensores simétricos y antisimétricos

Definición 5.6 *Tensor simétrico*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, decimos que un tensor $\hat{T} \in T^{(0,k)}(V)$ es simétrico si su valor no cambia bajo el intercambio de dos argumentos, es decir, sean $v_1, ..., v_k \in V$:

$$\hat{T}(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = \hat{T}(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k)$$

con $1 \leq i < j \leq k$.

El conjunto de los tensores covariantes simétricos de orden k en V es un subespacio vectorial de $T^{(0,k)}(V)$ con la suma y la multiplicación por escalar usuales, y lo denotamos por $\Sigma^{(0,k)}(V) \equiv \Sigma^k(V^*)$.

Definición 5.7 *Tensor antisimétrico*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, decimos que un tensor $\hat{T} \in T^{(0,k)}(V)$ es antisimétrico si su valor cambia de signo bajo el intercambio de dos argumentos, es decir, sean $v_1, ..., v_k \in V$:

$$\hat{T}(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\hat{T}(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k)$$

con $1 \leq i < j \leq k$.

El conjunto de los tensores covariantes antisimétricos de orden k en V es un subespacio vectorial de $T^{(0,k)}(V)$ con la suma y la multiplicación por escalar usuales, y lo denotamos por $\Lambda^{(0,k)}(V) \equiv \Lambda^k(V^*)$.

A los tensores covariantes antisimétricos de orden k también se les llama formas exteriores o k-formas. Más adelante profundizaremos en las formas exteriores, pues son la base del álgebra exterior.

5.2. Tensores y campos tensoriales en variedades

Definición 5.8 *Fibrado tensorial*

Sea M una variedad diferenciable, se define el fibrado tensorial sobre M como:

$$T^{(k,l)}TM = \bigsqcup_{p \in M} T^{(k,l)}(T_pM)$$

siendo $T^{(k,l)}(T_pM)$ el conjunto de los tensores de orden (k, l) sobre el espacio tangente a M en el punto p.

El fibrado tensorial tiene una aplicación asociada, llamada proyección, que a cada tensor $\hat{T} \in T^{(k,l)}TM$ le asocia el punto $p \in M$ al cual es tangente:

$$\begin{aligned} \pi :\ T^{(k,l)}TM &\to M \\ \hat{T} &\longmapsto p \end{aligned}$$

de manera que $\hat{T} \in T^{(k,l)}T_pM$.

Algunos ejemplos son:

- $T^{(1,0)}TM = TM$.
- $T^{(0,1)}TM = T^*M$.

Así que vemos que los fibrados tangente y cotangente no son más que casos particulares del fibrado tensorial.

Podremos definir los campos tensoriales como aplicaciones continuas que a cada punto $p \in M$ le asocian un tensor $\hat{T} \in T^{(k,l)}T_pM$.

Definición 5.9 *Campo tensorial*

Sea M una variedad diferenciable, un campo tensorial en M es una aplicación continua $T : M \to T^{(k,l)}TM$ tal que:

$$\pi \circ T = Id_M$$

Sea M una variedad diferenciable y $\left(U, \{\bar{x}^i\}_{i=1}^n\right)$ una carta cualquiera de M, podremos expresar los campos tensoriales como:

$$T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l} \partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_k} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_l}; \quad T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l} = T\left(dx^{\alpha_1}, ..., dx^{\alpha_k}, \partial_{\beta_1}, ..., \partial_{\beta_l}\right)$$

donde $T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l} : U \subset M \to \mathbb{R}$ serán las componentes de T, y ∂_{α_i} y dx^j las bases coordenadas. Si evaluamos en un punto $p \in M$, se tendrá:

$$T_p = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l}(p)\partial_{\alpha_1}|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_k}|_p \otimes dx^{\beta_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_l}|_p$$

Proposición 5.10 *Criterio de diferenciabilidad de campos tensoriales*

Sea M una variedad diferenciable y $T : M \to T^{(k,l)}TM$ un campo tensorial. Entonces, diremos que T es diferenciable si , y solo si las componentes $T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_l}$ son diferenciables para cada carta $\big(U, \{x^i\}_{i=1}^n\big)$.

El conjunto de los campos tensoriales diferenciables de orden (k, l) sobre una variedad diferenciable M lo denotamos por $\Gamma\big(T^{(k,l)}(TM)\big)$, y el conjunto de todos los campos tensoriales diferenciables en M lo denotamos por $\Gamma(M)$. Los campos tensoriales también pueden ser simétricos o antisimétricos.

6. Formas Diferenciales

6.1. Álgebra exterior

En el capítulo anterior definimos las formas exteriores como tensores covariantes antisimétricos. Un resultado interesante asociado a este tipo de tensores es el siguiente:

Lema 6.1 *Sea V un espacio vectorial real y $\hat{T} \in T^k(V^*)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\hat{T}$ es antisimétrico.*
2. *Si los vectores $v_1, ..., v_k \in V$ son linealmente dependientes, entonces se tiene que $\hat{T}(v_1, ..., v_k) = 0$.*
3. *Si $\hat{T}$ tiene dos argumentos iguales, entonces $\hat{T}(v_1, ..., w, ..., w, ..., v_k) = 0$.*

El conjunto de las k-formas sobre un espacio vectorial real V se denota por $\Lambda^k(V^*)$ y es un subespacio vectorial de $T^k(V^*)$. Existe una proyección natural de $T^k(V^*)$ a $\Lambda^k(V^*)$ que nos permitirá obtener una k forma a partir de un tensor cualquiera $T^k(V^*)$.

Sea S_k el grupo de las permutaciones del conjunto $\{1, ..., k\}$, si $\hat{T} \in T^k(V^*)$ y $\sigma \in S_k$, podemos definir un nuevo tensor como:

$${}^{\sigma}\hat{T}(v_1, ..., v_k) = \hat{T}(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)})$$

es decir, hemos intercambiado un número arbitrario de argumentos y hemos obtenido otro tensor. Con esto podemos definir el proyector $Alt : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V*)$, llamado antisimetrización, como:

$$Alt(\hat{T}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)\ {}^{\sigma}\hat{T}$$

donde $sgn(\sigma) = 1$ si se hace un número par de transposiciones y $sgn(\sigma) = -1$ si se hace un numero impar de transposiciones. Por ejemplo, para un tensor $\hat{T} \in T^2(V^*)$:

$$Alt(\hat{T}) = Alt(T_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta) = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}(dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha)$$

Proposición 6.2 *Propiedades de la antisimetrización*

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\hat{T}$ un tensor covariante sobre V:

1. $Alt(\hat{T})$ *es antisimétrico.*
2. $Alt(\hat{T}) = \hat{T} \iff \hat{T}$ *es antisimétrico.*

6.1.1. Producto exterior

Definición 6.3 *Producto exterior*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y $k, l \in \mathbb{N}$, con $k, l \leq$, llamamos producto exterior a la aplicación:

$$\wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) \to \Lambda^{k+l}(V^*)$$
$$(\hat{T}, \hat{G}) \longmapsto \hat{T} \wedge \hat{G}$$

definida por

$$\hat{T} \wedge \hat{G} = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\hat{T} \otimes \hat{G})$$

Si $\hat{T}$ es de orden 0, entonces $\hat{T} \wedge \hat{G} = \hat{T}\hat{G}$, es decir, el producto usual por escalar.

Por ejemplo, si tenemos dos 1-formas, $\hat{p} = p_\alpha dx^\alpha$ y $\hat{p} = q_\beta dx^\beta$:

$$\hat{P} = \hat{p} \wedge \hat{q} = 2! Alt(\hat{p} \otimes \hat{q}) = \hat{p} \otimes \hat{q} - \hat{q} \otimes \hat{p} = p_\alpha q_\beta (dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha) = P_{|\alpha\beta|} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

donde la notación $|\alpha\beta|$ indica que los índices son crecientes, es decir, se suma para $\alpha < \beta$. Como vemos, el tensor $\hat{P} \in \Lambda^2(V^*)$ aparece escrito como combinación lineal de la base dada por $\{dx^\alpha \wedge dx^\beta\}$ con $\alpha < \beta$.

Proposición 6.4 *Base de $\Lambda^k(V^*)$*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, si $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n$ es una base cualquiera de V^*, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, la colección de covectores

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_k} / \ i_1 < ... < i_k\}$$

llamados covectores elementales de orden k, es una base de $\Lambda^k(V^*)$. Además,

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si $k > n$, entonces $\dim\ \Lambda^k(V^*) = 0$.

Los covectores elementales de orden k son una generalización de la función determinante. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y $v_1, ..., v_k \in V$:

$$\varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_k}(v_1, ..., v_k) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \dots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \dots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \dots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}$$

Esto es como si tuviéramos una matriz $n \times k$ cuyas columnas son las componentes de los vectores $v_1, ..., v_k \in V$ respecto de la base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V, y el tensor $\varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_k}$ lo que hace es seleccionar k de las n filas para hacer el determinante de la submatriz $k \times k$ resultante. En particular, si $k = n$ entonces el determinante será el de la matriz entera.

Por ejemplo, si $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ la base dual estándar de $\mathbb{R}^3$ y $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3(u, v) = u^1 w^3 - w^1 u^3$$
$$\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 = \det(u, v, w)$$

Así, podemos extraer las siguientes conclusiones de las propiedades de los determinantes:

- Si dos índices se repiten, $\varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_k} = 0$.
- Si hacemos alguna permutación de los índices, entonces

$$\varepsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_k} = sgn(\sigma) \varepsilon^{i_{\sigma(1)}} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_{\sigma(k)}}$$

Definición 6.5 *Propiedades del producto exterior*

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, y $\hat{T}, \hat{T}', \hat{G}, \hat{G}', \hat{F}$ formas exteriores sobre V. Entonces, el producto exterior cumple las propiedades:

1. *Bilinearidad respecto a sus dos componentes: sean* $a, a' \in \mathbb{R}$,

$$(a\hat{T} + a'\hat{T}') \wedge \hat{G} = a(\hat{T} \wedge \hat{G}) + a'(\hat{T}' \wedge \hat{G})$$
$$\hat{G} \wedge (a\hat{T} + a'\hat{T}') = a(\hat{G} \wedge \hat{T}) + a'(\hat{G} \wedge \hat{T}')$$

2. *Asociatividad*

$$\hat{T} \wedge (\hat{G} \wedge \hat{F}) = (\hat{T} \wedge \hat{G}) \wedge \hat{F}$$

3. *Anticonmutatividad: sean* $\hat{T} \in \Lambda^k(V^*)$ *y* $\hat{G} \in \Lambda^l(V^*)$*:*

$$\hat{T} \wedge \hat{G} = (-1)^{kl}\hat{G} \wedge \hat{T}$$

4. *Sean* $\omega^1, ..., \omega^k \in V^*$ *y* $v_1, ..., v_k \in V$*:*

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k(v_1, ..., v_k) = \det\big(\omega^j(v_i)\big)$$

Proposición 6.6 *Sea* V *un espacio vectorial real de dimensión* n *y* $\hat{T} \in \Lambda^n(V^*)$*. Si* $L : V \to V$ *es una aplicación lineal y* $v_1, ..., v_n \in V$*, entonces:*

$$\hat{T}(Lv_1, ..., Lv_n) = \det(L)\hat{T}(v_1, ..., v_n)$$

6.2. Formas diferenciales en variedades diferenciables

En el capítulo anterior definimos los fibrados tensoriales. En particular, si tomamos el fibrado de los tensores covariantes de orden k sobre M, T^kT^*M, existirá un subconjunto $\Lambda^k(T^*M) \subseteq T^kT^*M$, que será el fibrado de los tensores covariantes de orden k antisimétricos sobre M, definido como:

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$$

Definición 6.7 *Forma diferencial de orden k*

Sea M una variedad diferenciable, llamamos forma diferencial de orden k a los campos tensoriales continuos que a cada $p \in M$ *le asignan un tensor covariante de orden k antisimétrico:*

$$T : M \to \Lambda^k(T^*M)$$

$$p \longmapsto \hat{T}$$

con $\hat{T} \in \Lambda^k(T_p^* M)$. *Si* π *es la proyección del fibrado, se cumplirá:*

$$\pi \circ T = Id_M$$

El espacio vectorial de las formas diferenciales de orden k *lo denotaremos por* $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^* M)$.

Supongamos que tenemos dos formas diferenciales $T \in \Omega^k(M)$ y $G \in \Omega^l(M)$ sobre una variedad diferenciable M de dimensión n. Si $(U, \{x^i\}_{i=1}^n)$ es una carta en la que están definidas ambas formas diferenciales, tendremos bien definido el producto exterior de dichas formas diferenciales en el abierto U, $T \wedge G = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(T \otimes G) \in \Omega^{(k+l)}(M)$, que sobre cada punto será:

$$(T \wedge G)_p = T_p \wedge G_p$$

En U, podremos expresar las formas diferenciales como:

$$T = T_{|i_1 \cdots i_k|} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}; \quad T_{|i_1 \cdots i_k|} = T\big(\partial_{i_1}, ..., \partial_{i_k}\big)$$

Como vimos, $T_{|i_1 \cdots i_k|} : M \to \mathbb{R}$ serán las funciones componentes, y T será diferenciable en U si, y sólo si las componentes $T_{|i_1 \cdots i_k|}$ son diferenciables en U.

Proposición 6.8 *Sean* $(U, \{x^i\}_{i=1}^n)$ *y* $(\bar{U}, \{\bar{x}^i\}_{i=1}^n)$ *dos cartas con* $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$, *entonces en* $U \cap \bar{U}$ *se cumple:*

$$d\bar{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^n = \det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

6.3. Diferencial exterior

A continuación, veremos como extender el concepto de diferencial a formas diferenciales en variedades diferenciables.

Teorema 6.9 *Existencia y unicidad de la diferencial exterior*

Sea M *una variedad diferenciable, existen operadores únicos* $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ *para cada* k *entero no negativo, llamados diferencial exterior, que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. d *es lineal sobre* $\mathbb{R}$, *es decir, sea* $\omega \in \Omega^k(M)$ *y* $a \in \mathbb{R}$:

$$d(a\omega) = ad\omega$$

2. *Sea* $\omega \in \Omega^k(M)$ *y* $\eta \in \Omega^l(M)$, *entonces:*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

3. $d \circ d \equiv d^2 = 0$.

4. *Sea* $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, *df es la diferencial de f, dada por* $df(X) = Xf$, *con X un campo vectorial diferenciable sobre M.*

En una carta diferenciable $(U, \{x^i\}_{i=1}^n)$ *cualquiera de* M, *la diferencial de* $\omega \in \Omega^k(M)$ *se expresa como:*

$$d(\omega_{|j_1 \cdots j_l|} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}) = d\omega_{|j_1 \cdots j_l|} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$

Como vemos, es un operador que aplicado a una forma diferencial de orden k nos devuelve otra forma diferencial de orden $k+1$, y tal que $d^2 = 0$. Para una forma diferencial de orden 0, es decir, una función escalar, se tiene:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

que es lo que vimos en capítulos anteriores.

Además, una forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ será cerrada si $d\omega = 0$, y será exacta si existe otra forma diferencial $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$. Como $d \circ d = 0$, eso significa que toda forma diferencial exacta es cerrada.

7. Conexiones y curvatura

En capítulos anteriores introdujimos el concepto de derivada direccional, como la derivada de una función $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a lo largo de la dirección de un vector $v \in \mathbb{R}^n$:

$$D_{v_a} f = \frac{df}{dt}(a) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

Podemos extender la idea de las derivadas direccionales en el espacio euclídeo a campos vectoriales.

Definición 7.1 *Derivada direccional en el espacio euclídeo*

Sea Y un campo vectorial diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$ y $v \in T_p\mathbb{R}^n$ un vector cualquiera, definimos la derivada direccional de Y en la dirección de v como:

$$\nabla_v Y = v(Y^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = v^j \frac{\partial Y^i(p)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

Como vemos, esta definición es para un punto en concreto $p \in \mathbb{R}^n$, pero si en vez de un vector v tenemos un campo vectorial X sobre $U \subset \mathbb{R}^n$, la siguiente expresión será valida para cualquier punto de U:

$$\nabla_X Y = X(Y^i)\frac{\partial}{\partial x^i} = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = X^j Y^i_{,j}\partial_i$$

donde la última igualdad es simplemente notación. Como vemos, la expresión resultante sigue siendo un campo vectorial.

Sin embargo, en variedades diferenciables generales no podemos proceder de esta manera. Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$ un punto cualquiera y $v \in TM$ un campo vector cualquiera. Ahora, supongamos una curva parametrizada por el parámetro t cuyo vector tangente en p es $v(p)$, y un campo vectorial Y. Si queremos hacer la derivada de Y a lo largo de la curva, tendremos que hacer:

$$\lim_{t\to 0}\frac{Y(p+vt)-Y(p)}{t}$$

El problema es que $Y(p+vt)$ e $Y(p)$ pertenecen a espacios tangentes distintos, así que no podemos restarlos. Necesitaremos alguna operación que transporte el vector $Y(p+vt)$ al punto p, de manera que tengamos un vector $Y^*(p)$ que sí pertenezca al mismo espacio que $Y(p)$, y por lo tanto la resta esté definida. Esa operación será la derivada covariante, que obtendremos al introducir el concepto de conexión en las variedades diferenciables.

7.1. Conexión

Definición 7.2 *Conexión lineal*

Sea M una variedad diferenciable y $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de los campos vectoriales diferenciables de M, definimos la conexión lineal en M como la aplicación:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $\nabla_X Y$ *es lineal sobre* $\mathcal{C}^\infty(M)$ *en* X*: sean* $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *y* $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$*,*

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$$

2. $\nabla_X Y$ *es lineal sobre* $\mathbb{R}$ *en* Y*: sean* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *y* $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$*,*

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2$$

3. *Sea* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$*,*

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y$$

Al tensor resultante, $\nabla_X Y$*, se le llama derivada covariante de* Y *en la dirección de* X*.*

Como vemos, la derivada covariante de un campo vectorial Y en la dirección del campo vectorial X, $\nabla_X Y$, es análoga a la derivada direccional de Y en la dirección X.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $(U, \{x^i\}_{i=1}^n)$ una carta de M, podemos encontrar la expresión de la conexión en dicha carta como:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ji} \partial_k \tag{1}$$

donde $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$ son n^3 funciones diferenciables, a las que llamamos componentes o símbolos de la conexión. Entonces, usando la primera y la tercera propiedad de las conexiones, podemos calcular la derivada covariante de $Y \in \mathfrak{X}(M)$ en la dirección de $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \left[Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + (\partial_i Y^j) \partial_j \right] = X^i \left(Y^j \Gamma^k_{ji} \partial_k + Y^j_{,i} \partial_j \right)$$

y reorganizando índices, nos queda:

$$\nabla_{X^i \partial_i} Y = X^i (Y^k_{,i} + Y^j \Gamma^k_{ji}) \partial_k = X^i Y^k_{;i} \partial_k \tag{2}$$

Entonces, la derivada covariante de un campo vectorial Y (tensor 1-contravariante) en la dirección de un campo vectorial X da como resultado otro campo vectorial. Sin embargo, podemos generalizar la derivada covariante "direccional" para obtener una derivada covariante "general", a la cual llamaremos simplemente derivada covariante:

$$\nabla Y = (Y^k_{,i} + Y^j \Gamma^k_{ji})\partial_k \otimes dx^i = Y^k_{;i}\partial_k \otimes dx^i; \quad Y^k_{;i} = \nabla Y(dx^k, \partial_i)$$

Así, definiremos la derivada covariante de un campo vectorial de forma que $\nabla_X Y = \nabla Y(\cdot, X)$, siendo X, Y campos vectoriales diferenciables. El resultado es un campo tensorial de orden $(1,1)$, de forma que el orden covariante ha aumentado en una unidad.

A partir de la derivada covariante podemos definir varios conceptos que serán muy útiles en geometría diferencial y por tanto en relatividad general.

Definición 7.3 *Derivada covariante a lo largo de una curva*

Sea M una variedad diferenciable, Y un campo vectorial sobre M y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ una curva en M tal que $Y(\gamma(t))$ está bien definida $\forall t \in I$, se define la derivada covariante de Y a lo largo de γ como:

$$\frac{DY}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} Y$$

donde $\dot{\gamma}$ es el vector tangente a la curva γ. Sea $(U, \{x^i\}_{i=1}^n)$ una carta diferenciable cualquiera que contenga puntos de la curva, podremos expresar la derivada covariante de Y a lo largo de la curva γ como:

$$\nabla_u Y = \frac{dx^i}{dt}(Y^k_{,i} + \Gamma^k_{ji} Y^j)\partial_k = \left(\frac{dY^k}{dt} + \Gamma^k_{ji} Y^j u^i\right)\partial_k$$

con $u = \dot{\gamma} = \frac{dx^i}{dt}$.

Definición 7.4 *Transporte paralelo*

Sea M una variedad diferenciable, Y un campo vectorial sobre M y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ una curva en M tal que $Y(\gamma(t))$ está bien definida $\forall t \in I$. Entonces, se dice que Y se transporta paralelamente a lo largo de la curva γ si para todo $t \in I$:

$$\frac{DY}{dt} = 0$$

Definición 7.5 *Geodésica*

Sea M una variedad diferenciable, Y un campo vectorial sobre M y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ una curva en M tal que $Y(\gamma(t))$ está bien definida $\forall t \in I$. Si denotamos por u al *vector tangente a la curva γ, diremos que la curva es una geodésica si u se transporta paralelamente a lo largo de la curva, es decr:*

$$\frac{Du}{dt} = \nabla_u u = 0$$

Sea $(U, \{x^i\}_{i=1}^n)$ una carta cualquiera que contenga puntos de la curva, podremos expresar la condición de geodésica como:

$$\frac{du^k}{dt} + \Gamma^k_{ji} u^j u^i = \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ji} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0$$

Al parámetro t para el cual se cumple esta ecuación lo llamamos parámetro afín.

También podemos ver cómo se expresa la derivada covariante bajo un cambio de coordenadas. Supongamos que tenemos la derivada covariante expresada en las coordenadas de la carta (U, x^i) y queremos pasar a las coordenadas de la carta $(U', x^{\bar{i}})$. Podremos encontrar una expresión que relacione la derivada covariante en ambos sistemas de coordenadas válida en el conjunto $U \cap U'$:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_{\bar{i}}} \partial_{\bar{j}} &= \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}}\partial_i} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \partial_j \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \nabla_{\partial_i} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \partial_j \right) = \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \nabla_{\partial_i}(\partial_j) + \frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \left(\partial_i \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \right) \partial_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \Gamma^k_{ji} \partial_k + \frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{\bar{j}}} \partial_j = \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ji} \partial_{\bar{k}} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{\bar{i}} \partial x^{\bar{j}}} \partial_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ji} \partial_{\bar{k}} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{\bar{i}} \partial x^{\bar{j}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \partial_{\bar{k}} = \\
&= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ji} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{\bar{i}} \partial x^{\bar{j}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \right) \partial_{\bar{k}} = \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{j}\bar{i}} \partial_{\bar{k}}
\end{aligned}$$

es decir:

$$\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{j}\bar{i}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{j}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ji} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{\bar{i}} \partial x^{\bar{j}}} \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k}$$

Vemos que el primer término se transforma como si fuera un tensor, pero el segundo término no, así que los símbolos de la conexión no serán tensores. Si la transformación de coordenadas fuera una transformación lineal entonces el segundo término sí se anularía.

Hasta ahora hemos hablado de derivadas covariantes de campos vectoriales, pero se puede extender la noción de derivada covariante a campos tensoriales de orden (k, l).

Proposición 7.6 *Derivada covariante de campos tensoriales*

Sea M una variedad diferenciable y ∇ una conexión en TM. Entonces, ∇ determina una conexión única en cada fibrado tensorial $T^{(k,l)}(TM)$, también denotada por ∇, tal que se cumplen las siguientes propiedades para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$:

1. *En $T^{(1,0)}(TM)$, ∇ coincide con la conexión dada.*

2. *En $T^{(0,0)}(TM)$, ∇ viene dada por la diferenciación usual de funciones escalares:*

$$\nabla_X f = Xf$$

3. *∇ obedece la regla del producto respecto al producto tensorial:*

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$$

4. *∇ obedece la regla del producto respecto al emparejamiento natural de campos vectoriales Y y covectoriales ω:*

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$$

Así, la derivada covariante en la dirección X de un campo tensorial T diferenciable en M define un campo tensorial único $\nabla_X T$.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $T \in \Gamma(T^{(k,l)}(TM))$ y $(U, \{x^i\}_{i=1}^n)$ una carta diferenciable de M. Entonces, en la base coordenada podremos escribir:

$$T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l} \partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_k} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_l}$$

y la derivada covariante en la dirección de $X = X^\gamma \partial_\gamma$ será:

$$\nabla_X T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l;\gamma} X^\gamma \partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_k} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_l}$$

donde

$$\begin{aligned} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l;\gamma} = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l,\gamma} + \Gamma^{\alpha_1}_{\mu\gamma} T^{\mu \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l} + \cdots + \Gamma^{\alpha_k}_{\mu\gamma} T^{\alpha_1 \cdots \mu}_{\beta_1 \cdots \beta_l} - \\ - \Gamma^{\mu}_{\beta_1 \gamma} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\mu \cdots \beta_l} - \cdots - \Gamma^{\mu}_{\beta_l \gamma} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \mu} \end{aligned}$$

Así, para un campo vectorial $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$ se tendrá:

$$\nabla_X Y = X^\gamma \big(Y^\alpha_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} Y^\beta\big) \partial_\alpha$$

que es lo mismo que se obtuvo anteriormente. Como también hicimos, podemos definir una derivada covariante general para tensores, de manera que la derivada covariante de un tensor $T^{(k,l)}(TM)$ será un tensor $T^{(k,l+1)}(TM)$, defindo como:

$$\nabla T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_l ; \gamma} \partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_k} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_l} \otimes dx^\gamma$$

de forma que $\nabla_X T = \nabla T(\cdot, \ldots, \cdot, X)$.

7.2. Torsión y curvatura

7.2.1. Torsión

Definición 7.7 *Aplicación torsión*

Sea M una variedad difereciable, ∇ una conexión lineal en M y $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de los campos vectoriales diferenciables en M, definimos la aplicación torsión como la aplicación:

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \tau(X, Y) \end{aligned}$$

tal que:

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

siendo $[\cdot, \cdot]$ los paréntesis de Lie.

Proposición 7.8 *Propiedades de la aplicación torsión*

Sea M una variedad difereciable, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\tau(X, Y) = -\tau(Y, X)$
2. $\tau(fX, Y) = f\tau(X, Y)$

El resultado de aplicar la torsión a dos campos vectoriales es un campo vectorial, lo que nos induce a pensar que existirá un campo tensorial $T \in T^{(1,2)}(TM)$, al que llamaremos tensor de torsión, tal que para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ cualesquiera se cumple:

$$T(\cdot, X, Y) = \tau(X, Y)$$

Escribiendo esta igualdad en una carta cualquiera $(U, \{x\}_{i=1}^n)$, podemos ver que el tensor torsión será:

$$T(\cdot,\cdot,\cdot) = T^\alpha_{\beta\gamma}\partial_\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma; \;\; T^\alpha_{\beta\gamma} = \left(\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right)$$

Aunque en la definición de $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ vimos que había una parte que no se transformaba como un tensor, al restarle $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ sólo queda la parte que se transforma como un tensor. Además, vemos que es un tensor antisimétrico bajo intercambio de los índices inferiores (es decir, bajo el intercambio de los dos últimos argumentos), ya que por definición la aplicación torsión es antisimétrica.

Por último, si $T^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, entonces $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, la conexión se dice simétrica o libre de torsión y $\tau(X, Y) = 0$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ cualesquiera.

7.2.2. Curvatura

Definición 7.9 *Aplicación curvatura*

Sea M una variedad difereciable, ∇ una conexión lineal en M y $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de los campos vectoriales diferenciables en M, definimos la aplicación curvatura como la aplicación:

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (Z, X, Y) &\longmapsto \rho_{X,Y}(Z) \end{aligned}$$

tal que:

$$\rho(Z, X, Y) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

Proposición 7.10 *Propiedades de la aplicación curvatura Sea M una variedad difereciable, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\rho_{X,Y}(Z) = -\rho_{Y,X}(Z)$
2. $\rho_{fX,Y}(Z) = f\rho_{X,Y}(Z)$
3. $\rho_{X,Y}(fZ) = f\rho_{X,Y}(Z)$

Así, existirá un campo tensorial $R \in T^{(1,3)}(TM)$, al que llamaremos tensor curvatura, tal que para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ cualesquiera:

$$R(\cdot, Z, X, Y) = \rho_{X,Y}(Z)$$

Escribiendo esta ecuación en una carta $(U, \{x\}_{i=1}^{n})$ cualquiera, se llega a que el tensor de curvatura es:

$$R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\partial_\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\delta$$
$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}$$

y será antisimétrico bajo intercambio de los dos últimos índices porque ρ es antisimétrica bajo intercambio de los dos últimos argumentos.

Una propiedad muy importante del tensor de curvatura, es que si la conexión es simétrica ($T = 0 \implies \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$), entonces se cumplen la Primera Identidad de Bianchi:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}_{\gamma\delta\beta} + R^{\alpha}_{\delta\beta\gamma} = 0$$

y la Segunda Identidad de Bianchi:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu} + R^{\alpha}_{\beta\delta\mu;\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma;\delta} = 0$$

7.3. Variedades Pseudo-Riemannianas

Definición 7.11 *Variedad Pseudo-Riemanniana*

Llamamos variedad Pseudo-Riemanniana al par (M, g), donde M es una variedad diferenciable y g es un tensor covariante de orden 2, llamado tensor métrico, que cumple las siguientes propiedades para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ cualesquiera:

1. *Es simétrico*
$$g(X, Y) = g(Y, X)$$

2. *Es no singular*
$$g(X, Y) = 0 \ \forall Y \iff X = 0$$

El tensor métrico se comporta como el producto interior, y en una carta $(U, \{x\}_{i=1}^{n})$ cualquiera podemos escribirlo como:

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

La definición de tensor métrico la hemos hecho en general como campo tensorial, pero si evaluamos en un punto $p \in M$ tendremos el siguiente escalar en el espacio T_pM:

$$g_p(X_p, Y_p) = X_p \cdot Y_p$$

Además, por ser no singular existe un tensor métrico inverso, g^{-1}, que será contravariante de orden 2 y en una carta $(U, \{x\}_{i=1}^n)$ cualquiera podremos escribirlo como:

$$g^{-1} = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta$$

de manera que:

$$g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$$

Además, para cada $p \in M$ siempre se puede hallar un conjunto de campos vectoriales linealmente independientes $\{e_1, ..., e_n\}$ tales que:

$$g(e_i, e_j) = \eta_{ij} \begin{cases} \eta_i \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$$

con $\eta_i = \pm 1$. Si $\eta_1 = -1$ y $\eta_j = 1, j \neq 1$ para cada $p \in M$, entonces diremos que (M, g) es una variedad de Minkoski.

Si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to M$ es una curva parametrizada tal que a cada $t \in [a, b]$ le corresponde un $\gamma(t) = p \in M$, podremos hallar la longitud de la curva entre t_0 y t como:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g\Big(\dot{\gamma}(\xi), \dot{\gamma}(\xi)\Big)} d\xi$$

que en una carta $(U, \{x\}_{i=1}^n)$ se podría escribir como:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{dx^\alpha}{d\xi} \cdot \frac{dx^\beta}{d\xi}} d\xi$$

En forma diferencial, podemos expresar este resultado como:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}$$

y si el parámetro usado es la distancia, s, se tendrá:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

A esta expresión se le llama métrica. Realmente es una expresión simbólica pues la correcta es $g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$, aunque se suele usar por simplicidad. Por ejemplo, en el espacio de Minkowski la métrica sería:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Además, gracias a la métrica podemos subir y bajar índices de los tensores. Por ejemplo, podemos relacionar las componentes de 1-formas y campos vectoriales como:

$$p_\beta dx^\beta = g(p^\gamma \partial_\gamma, \cdot) = g_{\alpha\beta} dx^\alpha (p^\gamma \partial_\gamma) dx^\beta = g_{\alpha\beta} p^\alpha dx^\beta$$

de manera que se tiene que las componentes se relacionarán según:

$$p_\beta = g_{\alpha\beta} p^\alpha \iff p^\alpha = g^{\alpha\beta} p_\beta$$

y para campos tensoriales de orden (k, l), se tendrá:

$$T^{\beta_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}_{\alpha_1 \beta_2 \cdots \beta_l} = g_{\alpha_1 \lambda} g^{\beta_1 \rho} T^{\lambda \alpha_2 \cdots \alpha_k}_{\rho \beta_2 \cdots \beta_l}$$

Una propiedad muy importante de las variedades pseudo-Riemannianas es que tienen una conexión natural que es libre de torsión y tal que la derivada covariante del tensor métrico se anula:

Proposición 7.12 *Conexión Riemanniana o de Levi-Civita*

Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana, entonces (M, g) tiene una conexión natural ∇ tal que:

1. *∇ es libre de torsión.*

2. *La derivada covariante de la métrica es nula, $\nabla g = 0$*

A esta conexión se le llama conexión Riemanniana o conexión de Levi-Civita y viene definida por el tensor métrico g.

Sea $(U, \{x\}_{i=1}^{n})$ una carta cualquiera de una variedad pseudo-Riemanniana (M, g), los símbolos de la conexión de Levi-Civita, llamados símbolos de Christoffel, toman la siguiente forma:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\gamma\mu,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$$

7.3.1. Tensor de Riemann

En variedades pseudo-Riemannianas (M, g), podemos bajar el índice contravariante del tensor curvatura para formar un tensor $(0, 4)$, llamado tensor curvatura de Riemann o simplemente tensor de Riemann:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} R^{\mu}_{\beta\gamma\delta}$$

El tensor de Riemann cumple las siguientes propiedades:

1. Es antisimétrico:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

2. Primera Identidad de Bianchi (si la conexión es libre de torsión)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$$

Con los tensores de curvatura y de Riemann, podemos ver qué espacios serán de curvatura nula, de curvatura constante y de curvatura irregular.

Teorema 7.13 *Una variedad pseudo-Riemanniana se dice plana si su tensor curvatura es idénticamente nulo.*

Definición 7.14 *Espacio de curvatura constante*

Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana, decimos que M es un espacio de curvatura constante si el tensor de Riemann cumple la siguiente relación:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = k(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \tag{3}$$

con $k \in \mathbb{R}$ una constante.

Aquellos espacios cuyos tensores de curvatura y de Riemann no cumplan ninguna de las dos condiciones tendrán una curvatura dependiente del punto de la variedad que estemos considerando.

A partir del tensor de curvatura y del tensor de Riemann podemos definir el tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta}$$

que es un tensor 2-covariante simétrico. Si contraemos índices otra vez, obtenemos el escalar de Ricci:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\mu} R_{\mu\alpha}$$

Por último, si la conexión es libre de torsión el tensor curvatura cumplirá la Segunda Identidad de Bianchi y podremos definir el tensor de Einstein como:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$$

que además cumple la siguiente ecuación, llamada Identidades de Bianchi Contraídas:

$$G^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0$$

8. Formalismo de Cartan

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $(U, \{x\}_{i=1}^{n})$ una carta cualquiera de M. Consideremos una base de vectores $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ y una base dual $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^{n}$. Podemos definir las 1-formas de la conexión como las 1-formas $\omega^i_j : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^{\infty}(M)$ tales que para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\nabla_X e_j = \omega^i_j(X) e_i$$

Partiendo de la aplicación torsión $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, podemos definir las 2-formas de la torsión como:

$$\tau(X, Y) = \tau^i(X, Y) e_i$$

dado que $\tau(X, Y)$ es un campo vectorial. Además, si recordamos que $\tau(X, Y) = T(\cdot, X, Y)$, podemos relacionar las 2-formas de la torsión con el tensor torsión:

$$\tau(X,Y) = T(\cdot, X, Y) = T^{\alpha}_{\beta\gamma} X^{\beta} Y^{\gamma} e_{\alpha} = \tau^{\alpha}(X,Y) e_{\alpha} \implies \tau^{\alpha}(\cdot,\cdot) = T^{\alpha}_{\beta\gamma} \varepsilon^{\beta} \otimes \varepsilon^{\gamma}$$

y teniendo en cuenta que $T^{\alpha}_{\beta\gamma} = -T^{\alpha}_{\gamma\beta}$, podemos escribir esta relación como:

$$\tau^{\alpha}(\cdot,\cdot) = \frac{1}{2} T^{\alpha}_{\beta\gamma} \varepsilon^{\beta} \wedge \varepsilon^{\gamma}$$

Por último, definimos las 2-formas de la curvatura. Recordemos que la aplicación curvatura era $\rho : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, de manera que si fijamos dos campos vectoriales X, Y, tendremos la aplicación $\rho_{X,Y} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ y definiremos las 2-formas de la curvatura como:

$$\rho_{X,Y}(e_j) = \rho^i_j(X,Y) e_i$$

Sabemos que $\rho_{X,Y}(e_{\beta}) = R(\cdot, e_{\beta}, X, Y)$, así que podemos relacionar las 2-formas de la curvatura con el tensor curvatura:

$$\rho_{X,Y}(e_{\beta}) = R(\cdot, e_{\beta}, X, Y) = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} X^{\gamma} Y^{\delta} e_{\alpha} = \rho^{\alpha}_{\beta}(X,Y) e_{\alpha} \implies \rho^{\alpha}_{\beta}(\cdot,\cdot) = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\gamma} \otimes \varepsilon^{\delta}$$

Como $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = -R^{\alpha}_{\beta\delta\gamma}$, podremos escribir las 2-formas de la conexión como:

$$\rho^{\alpha}_{\beta}(\cdot,\cdot) = \frac{1}{2} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\gamma} \wedge \epsilon^{\delta} \tag{4}$$

A continuación, obtendremos las ecuaciones de estructura de Cartan, pero primero necesitaremos un par de resultados. El primero es que dado un campo vectorial Z, podemos escribirlo como:

$$Z = Z^{\alpha} e_{\alpha} = \langle Z^{\gamma} e_{\gamma}, \varepsilon^{\alpha} \rangle e_{\alpha} = \langle Z, \varepsilon^{\alpha} \rangle e_{\alpha}$$

y el segundo es la identidad de Cartan, cuya demostración incluimos en los anexos:

Proposición 8.1 *Identidad de Cartan*

Si X e Y son campos vectoriales diferenciables en una variedad diferenciables M y ω es una 1-forma, entonces:

$$d\omega(X,Y) = X\big(\langle Y, \omega \rangle\big) - Y\big(\langle X, \omega \rangle\big) - \langle [X,Y], \omega \rangle$$

Partiendo de la definición de la aplicación torsión y aplicando los resultados anteriores, se llega a que:

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = \nabla_X\big(\langle Y, \varepsilon^\alpha\rangle e_\alpha\big) - \nabla_Y\big(\langle X, \varepsilon^\alpha\rangle e_\alpha\big) - \langle [X,Y], \varepsilon^\alpha\rangle e_\alpha$$
$$\tau(X,Y) = \tau^\alpha(X,Y)e_\alpha = \big(d\varepsilon^\alpha(X,Y) + \omega^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta(X,Y)\big)e_\alpha$$

lo que nos lleva a la primera ecuación de estructura de Cartan:

$$\tau^\alpha = d\varepsilon^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta$$

Ahora, haciendo un desarrollo similar para las 2-formas de la curvatura, se tiene:

$$\begin{aligned}
\rho_{X,Y}(e_\beta) &= \nabla_X \nabla_Y e_\beta - \nabla_Y \nabla_X e_\beta - \nabla_{[X,Y]} e_\beta = \\
&= \nabla_X \omega^\alpha_\beta(Y) e_\alpha - \nabla_Y \omega^\alpha_\beta(X) e_\alpha - \omega^\alpha_\beta([X,Y]) e_\alpha \\
\rho^\alpha_\beta(X,Y)e_\alpha &= \big(d\omega^\alpha_\beta(X,Y) + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta(X,Y)\big)e_\alpha
\end{aligned}$$

de manera que la segunda ecuación de estructura de Cartan es:

$$\rho^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta$$

8.1. Identidades de Bianchi

Podemos obtener las identidades de Bianchi a partir de las ecuaciones de estructura de Cartan. Tomando la diferencial exterior en la primera ecuación de Cartan:

$$\begin{aligned}
d\tau^\alpha &= d(d\varepsilon^\alpha) + d(\omega^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta) = d\omega^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta - \omega^\alpha_\beta \wedge d\varepsilon^\beta = \\
&= (\rho^\alpha_\beta - \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta) \wedge \varepsilon^\beta - \omega^\alpha_\beta \wedge (\tau^\beta - \omega^\beta_\gamma \wedge \varepsilon^\gamma) = \\
&= \rho^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta - \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta \wedge \varepsilon^\beta - \omega^\alpha_\beta \wedge \tau^\beta + \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_\gamma \wedge \varepsilon^\gamma
\end{aligned}$$

de forma que nos queda la Primera Identidad de Bianchi:

$$d\tau^\alpha = \rho^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta - \omega^\alpha_\beta \wedge \tau^\beta$$

Si tomamos la diferencial exterior en la segunda ecuación de Cartan:

$$d\rho^\alpha_\beta = d(d\omega^\alpha_\beta) + d(\omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta) = d\omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta - \omega^\alpha_\gamma \wedge d\omega^\gamma_\beta =$$
$$= (\rho^\alpha_\gamma - \omega^\alpha_\mu \wedge \omega^\mu_\gamma) \wedge \omega^\gamma_\beta - \omega^\alpha_\gamma \wedge (\rho^\gamma_\beta - \omega^\gamma_\nu \wedge \omega^\nu_\beta)$$

con lo que se tiene la Segunda Identidad de Bianchi:

$$d\rho^\alpha_\beta = \rho^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta - \omega^\alpha_\gamma \wedge \rho^\gamma_\beta$$

Estas expresiones se pueden reducir a las expresiones en función del tensor curvatura que vimos anteriormente. Para ello, debemos tomar como bases las bases coordenadas y tenemos que tener en cuenta que la conexión es libre de torsión, ya que es una condición necesaria para llegar a las identidades de Bianchi. Los cálculos los mostraremos en el anexo.

8.2. Cálculo de la curvatura a partir de las ecuaciones de estructura de Cartan

A continuación, resolveremos las ecuaciones de estructura de Cartan para tres métricas pseudo-riemannianas distintas: la de Minkowski, la euclídea para una 2-esfera y la de Schwarzschild. Las dos primeras servirán como ejemplo de espacio plano y de espacio de curvatura constante, respectivamente, y la última como aplicación a la relatividad general.

El primer paso será calcular las 1-formas de la conexión. Si trabajamos con las bases coordenadas, podremos usar los símbolos de Christoffel y la expresión $\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} dx^\gamma$. Sin embargo, podemos usar un método más general en el que no hace falta trabajar en coordenadas y que vale para cualquier base ortogonal.

Partiendo de que nos encontramos en una variedad pseudo-riemanniana, si trabajamos con la conexión de Levi-Civita tendremos que:

$$\nabla g = \big(g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu}\big) dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma = 0 \implies g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu}$$
$$X^\gamma g_{\alpha\beta,\gamma} = X^\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} + X^\gamma \Gamma^\mu_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu} \implies g_{\alpha\beta,\gamma} dx^\gamma(X) = \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} dx^\gamma(X) + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} g_{\alpha\mu} dx^\gamma(X)$$
$$dg_{\alpha\beta}(X) = g_{\mu\beta}\omega^\mu_\alpha(X) + g_{\alpha\mu}\omega^\mu_\beta(X)$$

Como X es genérico y $\omega_{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu}\omega^\nu_\beta$, llegamos a la siguiente expresión tensorial:

$$dg_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \tag{5}$$

Si además escogemos las bases del espacio de manera que $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, es decir, que sea diagonal con los elementos de valor ± 1, la derivada se anulará y simplemente quedará:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$$

Usaremos estas ecuaciones junto a la primera ecuación de estructura de Cartan, teniendo en cuenta que la torsión es nula porque estamos usando la conexión de Levi-Civita. Una vez obtenidas las 1-formas de la conexión, calcularemos las 2-formas de la curvatura y a partir de la ecuación 4 obtenemos el tensor curvatura.

8.2.1. Espacio de Minkowski

Tomando como coordenadas $\{ct, x, y, z\}$, el tensor métrico de Minkowski en las bases coordenadas es:

$$g = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \implies g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

siendo las bases coordenadas:

$$\left\{ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}; \quad \left\{ cdt, dx, dy, dz \right\}$$

Las componentes de la métrica son constantes, de manera que los símbolos de Christoffel se anularán y el tensor curvatura será idénticamente nulo. Así, este sería un ejemplo de un espacio plano.

8.2.2. Superficie de una 2-esfera en el espacio euclídeo

A continuación, consideremos una 2-esfera en el espacio euclídeo. Tomando como coordenadas $\{\theta, \phi\}$ el tensor métrico y su inversa en las bases coordenadas será:

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta = a^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi) \implies g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(a^2, a^2 \sin^2\theta)$$
$$g^{-1} = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta = \frac{1}{a^2}\left(\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\phi \otimes \partial_\phi \right) \implies g^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2 \sin^2\theta} \right)$$

Si tomamos como bases:

$$\{e_\theta, e_\phi\} = \left\{ \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \right\}; \quad \begin{pmatrix} e_\theta \\ e_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a\sin\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\theta \\ \partial_\phi \end{pmatrix}$$

$$\{\varepsilon^\theta, \varepsilon^\phi\} = \left\{ad\theta, a\sin\theta d\phi\right\}; \quad \begin{pmatrix} \varepsilon^\theta \\ \varepsilon^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}$$

podremos escribir el tensor métrico y su inversa como:

$$g = \varepsilon^\theta \otimes \varepsilon^\theta + \varepsilon^\phi \otimes \varepsilon^\phi \implies g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,1)$$
$$g^{-1} = e_\theta \otimes e_\theta + e_\phi \otimes e_\phi \implies g^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,1)$$

Teniendo en cuenta que en este sistema de referencia $dg_{\alpha\beta} = 0$, calculamos las 1-formas de la conexión. Obtenemos que las no nulas son:

$$\omega^\theta_\phi = -\omega^\phi_\theta = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^\phi = -a\cos\theta d\phi$$

Ahora, usamos la segunda ecuación de estructura de Cartan para hallar las 2-formas de la conexión. Las no nulas son:

$$\rho^\theta_\phi = -\rho^\phi_\theta = a\sin\theta d\theta \wedge d\phi = \frac{1}{a}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi$$

A continuación, hallamos el tensor curvatura usando la ecuación 4. Las componentes no nulas son:

$$R^\theta_{\phi\theta\phi} = -R^\theta_{\phi\phi\theta} = R^\phi_{\theta\phi\theta} = -R^\phi_{\theta\theta\phi} = \frac{1}{a^2}$$

y bajando el índice contravariante llegamos al tensor de Riemann:

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = -R_{\theta\phi\phi\theta} = R_{\phi\theta\phi\theta} = -R_{\phi\theta\theta\phi} = \frac{1}{a^2}$$

Por último, si usamos las matrices de transformación de las bases coordenadas a las no coordenadas, llegamos a la expresión de las componentes del tensor de Riemann en la base coordenada:

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = -R_{\theta\phi\phi\theta} = R_{\phi\theta\phi\theta} = -R_{\phi\theta\theta\phi} = a^2\sin^2\theta$$

Se puede comprobar que en ambos sistemas de coordenadas se satisface la ecuación 3, de manera que podemos decir que la superficie de una esfera es un espacio de curvatura constante, siendo en ambos casos $\frac{1}{a^2}$ la constante de proporcionalidad.

8.3. Espacio-tiempo estático y con simetría esférica

En las coordenadas $\{t, r, \theta, \phi\}$ podemos escribir la métrica de un espacio-tiempo estático y con simetría esférica como:

$$ds^2 = -e^{2A(r)}c^2dt^2 + e^{2B(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

siendo $A(r), B(r)$ dos funciones que tienden a 0 cuando $r \to \infty$. Como bases tomaremos:

$$\{\varepsilon^t, \varepsilon^r, \varepsilon^\theta, \varepsilon^\phi\} = \left\{ce^{A(r)}dt, e^{B(r)}dr, rd\theta, r\sin\theta d\phi\right\}$$
$$\{e_t, e_r, e_\theta, e_\phi\} = \left\{\frac{1}{c}e^{-A(r)}\partial_t, e^{-B(r)}\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\theta, \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\right\}$$

En estas bases, las coordenadas de la métrica pasan a ser $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, así que tendremos que $dg_{\alpha\beta} = 0 \implies \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$. Obtenemos que 1-formas de la conexión no nulas son:

$$\omega^t_r = \omega^r_t = A'e^{-B}\varepsilon^t; \quad \omega^r_\theta = -\omega^\theta_r = -\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^\theta$$
$$\omega^r_\phi = -\omega^\phi_r = -\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^\phi; \quad \omega^\theta_\phi = -\omega^\phi_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^\phi$$

Con la segunda ecuación de estructura de Cartan, calculamos las 2-formas de la curvatura. Obtenemos que las no nulas son:

$$\rho^t_r = \rho^r_t = -C\varepsilon^t \wedge \varepsilon^r : \quad \rho^t_\theta = \rho^\theta_t = -\frac{A'}{r}D\varepsilon^t \wedge \varepsilon^\theta; \quad \rho^t_\phi = \rho^\phi_t = -\frac{A'}{r}D\varepsilon^t \wedge \varepsilon^\phi$$
$$\rho^r_\theta = -\rho^\theta_r = \frac{B'}{r}D\varepsilon^r \wedge d\varepsilon^\theta; \quad \rho^r_\phi = -\rho^\phi_r = D\frac{B'}{r}\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\phi; \quad \rho^\theta_\phi = -\rho^\phi_\theta = \frac{1-D}{r^2}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi$$

siendo $C = (A'' - A'B' + A')D$ y $D = e^{-2B}$.

Mediante la ecuación 4 podemos obtener las componentes del tensor curvatura, pero en este caso vamos a obtener el tensor de Ricci para ver cómo calcular el tensor de Ricci a partir de las 2-formas de la curvatura. Usaremos la ecuación:

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} = \rho^\mu_\alpha(e_\mu, e_\beta) \tag{6}$$

y obtenemos:

$$R_{tt} = C + 2D\frac{A'}{r}; \quad R_{rr} = -C + 2D\frac{B'}{r}; \quad R_{\theta\theta} = R_{\phi\phi} = \frac{B' - A'}{r}D + \frac{1-D}{r^2}$$

9. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado los conceptos más fundamentales de la geometría diferencial y los hemos usado para ir entendiendo los resultados y las herramientas que nos han permitido obtener las ecuaciones de estructura de Cartan. Gracias a estas ecuaciones hemos aprendido un método para calcular el tensor curvatura de una variedad pseudo-Riemanniana a partir de su métrica sin tener que calcular los símbolos de Christoffel previamente, y que además nos permite trabajar con bases que no son las coordenadas y que simplifican los cálculos; mediante la transformación de las bases podemos expresar los tensores obtenidos en las bases coordenadas, que sirven como bases estándar de los espacios.

Hemos encontrado también resultados que nos permiten clasificar las variedades pseudo-Riemannianas según su curvatura en las siguientes categorías: espacios planos, espacios de curvatura constante y espacios de curvatura irregular. Mediante las ecuaciones de estructura de Cartan, hemos visto que el espacio de Minkowski es un espacio plano y que la superficie de una esfera es un espacio de curvatura constante, resultados que a priori podíamos intuir y que hemos verificado, sirviendo así de ejemplo clarificador.

El objetivo personal a la hora de hacer este trabajo era hacer un primer acercamiento a la Geometría Diferencial, una materia que apenas se ve durante el grado y que proporciona herramientas muy potentes con grandes aplicaciones en toda la física, no únicamente en Relatividad General. Aunque no hemos incluido las demostraciones de los resultados por quedar fuera de lo que se pretendía con este trabajo, hemos podido entender cada paso que hemos dado hacia las ecuaciones de estructura de Cartan, lo cual nos ha permitido adentrarnos en el mundo de la Geometría Diferencial y aprender algunas de sus herramientas más importantes, como es el cálculo exterior.

Finalmente, como ampliación a este trabajo podría hacerse un programa mediante Python que trabajara con formas diferenciales y que, dada una métrica, resolviera los cálculos con los que obtenemos el tensor de curvatura a partir de las ecuaciones de estructura de Cartan, ya que a medida que aumenta el número de variables aumenta significativamente el número de componentes de las formas exteriores y los tensores implicados, haciendo que el cálculo de las mismas sea tedioso y fácil de errar.

A. Cálculos

A.1. Deducción de las componentes del tensor torsión

Hemos definido el tensor torsión T como aquel tal que:

$$T(\cdot, X, Y) = \tau(X, Y)$$

A partir de esta igualdad, podemos ver cuáles serán las componentes del tensor de torsión en una carta $(U, \{x\}_{i=1}^{n})$ cualquiera:

$$\begin{gathered}
T(\cdot,\cdot,\cdot) = T^{\alpha}_{\beta\gamma}\partial_\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma \implies T(\cdot, X, Y) = X^\beta Y^\gamma T^{\alpha}_{\beta\gamma}\partial_\alpha \\
\tau(X,Y) = X^\beta\big(Y^\alpha_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}Y^\mu\big)\partial_\alpha - Y^\delta\big(X^\gamma_{,\delta} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\delta}X^\mu\big)\partial_\gamma - \big(X^\lambda Y^\rho_{,\lambda} - Y^\lambda X^\rho_{,\lambda}\big)\partial_\rho \\
\tau(X,Y) = X^\beta\big(Y^\alpha_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}Y^\mu\big)\partial_\alpha - Y^\beta\big(X^\alpha_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}X^\mu\big)\partial_\alpha - \big(X^\beta Y^\alpha_{,\beta} - Y^\beta X^\alpha_{,\beta}\big)\partial_\alpha \\
\tau(X,Y) = \big(X^\beta \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}Y^\mu - Y^\beta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}X^\mu\big)\partial_\alpha \\
\tau(X,Y) = X^\beta Y^\mu\big(\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\big)\partial_\alpha = X^\beta Y^\gamma\big(\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\big)\partial_\alpha
\end{gathered}$$

Identificando con la expresión que obtuvimos para $T(\ \cdot, X, Y)$, tenemos que las componentes del tensor de torsión:

$$T^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

A.2. Deducción de los símbolos de Christoffel

Sea $(U, \{x\}_{i=1}^{n})$ una carta cualquiera de una variedad pseudo-Riemanniana (M, g), Veamos la forma que toman las componentes de la conexión. Por la segunda propiedad de las conexiones Riemannianas:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}g_{\alpha\mu} = 0$$

y, de manera equivalente, transponiendo (α, γ) y (β, γ):

$$\begin{gathered}
g_{\gamma\beta;\alpha} = g_{\gamma\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha}g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}g_{\gamma\mu} = 0 \\
g_{\alpha\gamma;\beta} = g_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}g_{\mu\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\gamma\beta}g_{\alpha\mu} = 0
\end{gathered}$$

de manera que:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} + g_{\gamma\beta;\alpha} - g_{\alpha\gamma;\beta} = 0$$

y por simetría de $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ y de $g_{\alpha\beta}$, nos queda:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta} = 2\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta}$$

Por último, despejando y renombrando índices, nos quedaría:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\gamma\mu,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$$

que son los llamados símbolos de Christoffel.

A.3. Tensor de Einstein

Como las variedades pseudo-Riemannianas tienen una conexión libre de torsión, para dicha conexión el tensor curvatura cumplirá la Segunda Identidad de Bianchi:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu} + R^{\alpha}_{\beta\delta\mu,\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma;\delta} = 0$$

Si contraemos los índices α y μ:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\alpha} - R_{\beta\delta;\gamma} + R_{\beta\gamma;\delta} = 0$$

y si multiplicamos por $g^{\delta\beta}$ y contraemos, nos queda:

$$R^{\alpha}_{\gamma;\alpha} - R_{;\gamma} + R^{\beta}_{\gamma;\beta} = 0$$

que despejando y renombrando índices da lugar a las llamadas Identidades de Bianchi Contraídas:

$$R^{\alpha}_{\beta;\alpha} - \frac{1}{2} R_{;\beta} = 0$$

Esto también se puede escribir como:

$$G^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0$$

donde G es el tensor de Einstein, que es un tensor simétrico:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$$

A.4. Demostración de la identidad de Cartan

Queremos demostrar que sean X e Y campos vectoriales diferenciables en una variedad diferenciables M y ω una 1-forma, entonces:

$$d\omega(X,Y) = X\big(\langle Y,\omega\rangle\big) - Y\big(\langle X,\omega\rangle\big) - \langle [X,Y],\omega\rangle$$

Para demostrar esta identidad, consideremos una variedad diferenciable M de dimensión n y $(U,\{x\}_{i=1}^{n})$ una carta de M. Sean $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$, $Y = Y^\beta \partial_\beta$ y $X = X^\gamma \partial_\gamma$:

$$\begin{gathered}
d\omega(\cdot,\cdot) = d(\omega_\alpha dx^\alpha) = \omega_{\alpha,\rho} dx^\rho \wedge dx^\alpha = \omega_{\alpha,\rho}(dx^\rho \otimes dx^\alpha - dx^\alpha \otimes dx^\rho) \\
d\omega(X,Y) = \omega_{\alpha,\rho}(X^\rho Y^\alpha - X^\alpha Y^\rho) = Y^\alpha X^\rho \omega_{\alpha,\rho} - X^\alpha Y^\rho \omega_{\alpha,\rho} = \\
= X(Y^\alpha \omega_\alpha) - \omega_\alpha X^\rho Y_{\alpha,\rho} - Y(X^\alpha \omega_\alpha) + \omega_\alpha Y^\rho X_{\alpha,\rho} = \\
X\big(\langle Y,\omega\rangle\big) - Y\big(\langle X,\omega\rangle\big) + \omega_\alpha\big(Y^\rho X_{\alpha,\rho} - X^\rho Y_{\alpha,\rho}\big) = \\
= X\big(\langle Y,\omega\rangle\big) - Y\big(\langle X,\omega\rangle\big) - \omega_\alpha [X,Y]^\alpha = X\big(\langle Y,\omega\rangle\big) - Y\big(\langle X,\omega\rangle\big) - \langle [X,Y],\omega\rangle
\end{gathered}$$

A.5. Deducción de las ecuaciones de Cartan

Partiendo de la definición de la aplicación torsión:

$$\begin{gathered}
\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = \\
= \nabla_X\big(\langle Y,\varepsilon^\alpha\rangle e_\alpha\big) - \nabla_Y\big(\langle X,\varepsilon^\alpha\rangle e_\alpha\big) - \langle [X,Y],\varepsilon^\alpha\rangle e_\alpha = \\
= \langle Y,\varepsilon^\alpha\rangle \nabla_X e_\alpha + X\big(\langle Y,\varepsilon^\alpha\rangle\big) e_\alpha - \langle X,\varepsilon^\alpha\rangle \nabla_Y e_\alpha - Y\big(\langle X,\varepsilon^\alpha\rangle\big) e_\alpha - \langle [X,Y],\varepsilon^\alpha\rangle e_\alpha = \\
= d\varepsilon^\alpha(X,Y) e_\alpha + \langle Y,\varepsilon^\alpha\rangle \omega_\alpha^\beta(X) e_\beta - \langle X,\varepsilon^\alpha\rangle \omega_\alpha^\beta(Y) e_\beta = \\
= d\varepsilon^\alpha(X,Y) e_\alpha + \big[\varepsilon^\alpha(Y)\omega_\alpha^\beta(X) - \varepsilon^\alpha(X)\omega_\alpha^\beta(Y)\big] e_\beta = \\
= d\varepsilon^\alpha(X,Y) e_\alpha + \varepsilon^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta(Y,X) e_\beta = \\
= d\varepsilon^\alpha(X,Y) e_\alpha + \omega_\alpha^\beta \wedge \varepsilon^\alpha(X,Y) e_\beta
\end{gathered}$$

De manera que:

$$\tau^\alpha(X,Y) e_\alpha = \big(d\varepsilon^\alpha(X,Y) + \omega_\beta^\alpha \wedge \varepsilon^\beta(X,Y)\big) e_\alpha$$

lo que nos lleva a la primera ecuación de estructura de Cartan:

$$\tau^\alpha = d\varepsilon^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \varepsilon^\beta$$

Ahora, haciendo un desarrollo similar para las 2-formas de la curvatura:

$$
\begin{aligned}
\rho_{X,Y}(e_\beta) &= \nabla_X \nabla_Y e_\beta - \nabla_Y \nabla_X e_\beta - \nabla_{[X,Y]} e_\beta = \\
&= \nabla_X \omega^\alpha_\beta(Y) e_\alpha - \nabla_Y \omega^\alpha_\beta(X) e_\alpha - \omega^\alpha_\beta([X,Y]) e_\alpha = \\
&= \nabla_X \big(\langle \omega^\alpha_\beta, Y\rangle e_\alpha\big) - \nabla_Y \big(\langle \omega^\alpha_\beta, X\rangle e_\alpha\big) - \langle \omega^\alpha_\beta, [X,Y]\rangle e_\alpha = \\
&= d\omega^\alpha_\beta(X,Y) e_\alpha + \langle Y, \omega^\alpha_\beta\rangle \omega^\gamma_\alpha(X) e_\gamma - \langle X, \omega^\alpha_\beta\rangle \omega^\gamma_\alpha(Y) e_\gamma = \\
&= d\omega^\alpha_\beta(X,Y) e_\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\gamma_\alpha(Y,X) e_\gamma = d\omega^\alpha_\beta(X,Y) e_\alpha + \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma(Y,X) e_\alpha \\
\rho^\alpha_\beta(X,Y) e_\alpha &= \big(d\omega^\alpha_\beta(X,Y) + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta(X,Y)\big) e_\alpha
\end{aligned}
$$

de manera que la segunda ecuación de estructura de Cartan es:

$$\rho^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta$$

A.6. Ecuaciones de estructura de Cartan en las bases coordenadas

Las ecuaciones de estructura Cartan son:

$$
\begin{aligned}
\tau^\alpha &= d\varepsilon^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta \\
\rho^\alpha_\beta &= d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta
\end{aligned}
$$

Si tomamos las bases coordenadas ∂_i y dx^i, tendremos que las 1-formas de la conexión serán:

$$\nabla_{X^\gamma \partial_\gamma} \partial_\beta = X^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \partial_\alpha = \omega^\alpha_\beta(X) \partial_\alpha \iff \omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} dx^\gamma$$

Sustituyendo en la primera ecuación de Cartan:

$$
\begin{aligned}
\tau^\alpha &= d(dx^\alpha) + \omega^\alpha_\beta \wedge dx^\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} dx^\gamma \wedge dx^\beta = \\
&= \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} dx^\gamma \otimes dx^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} dx^\beta \otimes dx^\gamma = \big(\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big) dx^\beta \otimes dx^\gamma = T^\alpha_{\beta\gamma} dx^\beta \otimes dx^\gamma
\end{aligned}
$$

y sustituyendo en la segunda ecuación de Cartan:

$$\rho^\alpha_\beta = d\big(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} dx^\gamma\big) + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} dx^\mu \wedge \Gamma^\gamma_{\beta\nu} dx^\nu = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} dx^\delta \wedge dx^\gamma + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma_{\beta\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu =$$

$$= \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta}(dx^{\delta} \otimes dx^{\gamma} - dx^{\gamma} \otimes dx^{\delta}) + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu}(dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - dx^{\nu} \otimes dx^{\mu}) =$$
$$\big(\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\big)dx^{\gamma} \otimes dx^{\delta} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}dx^{\gamma} \otimes dx^{\delta}$$

de manera que concuerda con las relaciones entre las 2-formas de la torsión y de la curvatura y los tensores torsión y curvatura.

A.7. Identidades de Bianchi

Las identidades de Bianchi obtenidas a partir de las ecuaciones de estructura de Cartan son:

$$d\tau^{\alpha} = \rho^{\alpha}_{\beta} \wedge \varepsilon^{\beta} - \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \tau^{\beta}$$
$$d\rho^{\alpha}_{\beta} = \rho^{\alpha}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}_{\beta} - \omega^{\alpha}_{\gamma} \wedge \rho^{\gamma}_{\beta}$$

Veamos que estas expresiones se pueden reducir a las expresiones en función del tensor curvatura que vimos anteriormente. Para ello, tomamos las bases coordenadas ∂_i y dx^i. Partiendo de que:

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}dx^{\gamma}$$
$$\rho^{\alpha}_{\beta} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}dx^{\gamma} \otimes dx^{\delta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta|\gamma\delta|}dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta}$$
$$\tau^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta\gamma}dx^{\beta} \otimes dx^{\gamma} = \frac{1}{2}T^{\alpha}_{|\beta\gamma|}dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma}$$

Para la primera ecuación, tenemos:

$$\frac{1}{2}T^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta}dx^{\delta} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} = \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta} \wedge dx^{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}dx^{\gamma} \wedge \frac{1}{2}T^{\beta}_{\mu\nu}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

que reorganizando índices, queda como:

$$\big(T^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} - R^{\alpha}_{\gamma\delta\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}T^{\mu}_{\beta\gamma}\big)dx^{\delta} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} = 0$$

A continuación, desarrollamos el producto exterior:

$$dx^{\delta} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} = dx^{\delta} \wedge (dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma}) = dx^{\delta} \wedge (dx^{\beta} \otimes dx^{\gamma} - dx^{\gamma} \otimes dx^{\beta}) =$$
$$= dx^{\delta} \wedge (dx^{\beta} \otimes dx^{\gamma}) - dx^{\delta} \wedge (dx^{\gamma} \otimes dx^{\beta}) =$$

$$= \frac{3!}{2!} Alt(dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma) - \frac{3!}{2!} Alt(dx^\delta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\beta) =$$
$$= 3! Alt(dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma)$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta que $dx^\delta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\beta$ es una transposición impar de índices de $dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma$, y por tanto tendremos que $Alt(dx^\delta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\beta) = -Alt(dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma)$. Ahora, desarrollamos la antisimetrización de $dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma$:

$$dx^\delta \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma = 3! Alt(dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma) =$$
$$dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma + dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\delta + dx^\gamma \otimes dx^\delta \otimes dx^\beta -$$
$$- dx^\delta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\delta \otimes dx^\gamma - dx^\gamma \otimes dx^\beta \otimes dx^\delta$$

Ahora, lo que hacemos es sustituir esta expresión para que la base de la 3-forma igualada a cero sea en función del producto tensorial y no del producto exterior. Sea $Z_{\beta\gamma\delta}$ las componentes de dicha 3-forma, procedemos de la siguiente manera:

$$Z_{\beta\gamma\delta} dx^\delta \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma =$$
$$= Z_{\beta\gamma\delta}(dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma + dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\delta + dx^\gamma \otimes dx^\delta \otimes dx^\beta -$$
$$- dx^\delta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\delta \otimes dx^\gamma - dx^\gamma \otimes dx^\beta \otimes dx^\delta) =$$
$$= \big(Z_{\beta\gamma\delta} + Z_{\delta\beta\gamma} + Z_{\beta\gamma\delta} - Z_{\delta\gamma\beta} - Z_{\beta\delta\gamma} - Z_{\gamma\beta\delta}\big) dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma$$

y como la 3-forma debe ser idéndicamente nula, se tiene la siguiente relación para sus componentes:

$$Z_{\beta\gamma\delta} + Z_{\delta\beta\gamma} + Z_{\beta\gamma\delta} - Z_{\delta\gamma\beta} - Z_{\beta\delta\gamma} - Z_{\gamma\beta\delta} = 0$$

Entonces, si la conexión es libre de torsión $T^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ y nos quedará la expresión:

$$-R^\alpha_{\gamma\delta\beta} - R^\alpha_{\beta\gamma\delta} - R^\alpha_{\delta\beta\gamma} + R^\alpha_{\gamma\beta\delta} + R^\alpha_{\delta\gamma\beta} + R^\alpha_{\beta\delta\gamma} = 0$$

y teniendo en cuenta que $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma}$, llegamos a la Primera Identidad de Bianchi tal y como la conocemos:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} = 0$$

Ahora, veamos la segunda ecuación. Sustituyendo, se tiene:

$$\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\mu}dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}=\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\gamma\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\wedge\Gamma^{\gamma}_{\beta\lambda}dx^{\lambda}-\Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}dx^{\lambda}\wedge\frac{1}{2}R^{\gamma}_{\beta\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}$$
$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\mu}dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}=\big(\Gamma^{\nu}_{\beta\delta}R^{\alpha}_{\nu\mu\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\delta}R^{\nu}_{\beta\mu\gamma}\big)dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}$$
$$\big(R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\mu}-\Gamma^{\nu}_{\beta\delta}R^{\alpha}_{\nu\mu\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\delta}R^{\nu}_{\beta\mu\gamma}\big)dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}=0$$

Si tenemos en cuenta que:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu}=R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}R^{\nu}_{\beta\gamma\delta}-\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}R^{\alpha}_{\nu\gamma\delta}-\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu}R^{\alpha}_{\beta\nu\delta}-\Gamma^{\nu}_{\delta\mu}R^{\alpha}_{\beta\gamma\nu}$$

nos quedará:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu}+\big[\Gamma^{\alpha}_{\nu\delta}R^{\nu}_{\beta\mu\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}R^{\nu}_{\beta\gamma\delta}\big]+\big[\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}R^{\alpha}_{\nu\gamma\delta}-\Gamma^{\nu}_{\beta\delta}R^{\alpha}_{\nu\mu\gamma}\big]+\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu}R^{\alpha}_{\beta\nu\delta}+\Gamma^{\nu}_{\delta\mu}R^{\alpha}_{\beta\gamma\nu}=0$$

pero esto se simplifica ya que cada uno de los corchetes vale cero; veremos el caso del primero corchete, y el segundo se haría de manera análoga.

$$\big(\Gamma^{\alpha}_{\nu\delta}R^{\nu}_{\beta\mu\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}R^{\nu}_{\beta\gamma\delta}\big)dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}=$$
$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\delta}R^{\nu}_{\beta\mu\gamma}dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\delta}R^{\nu}_{\beta\mu\gamma}dx^{\delta}\wedge dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}=$$
$$=\Gamma^{\alpha}_{\nu\delta}R^{\nu}_{\beta\mu\gamma}\big(dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}-dx^{\delta}\wedge dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\big)=0$$

de forma que lo que nos queda es:

$$\big(R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu}+\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu}R^{\alpha}_{\beta\nu\delta}+\Gamma^{\nu}_{\delta\mu}R^{\alpha}_{\beta\gamma\nu}\big)dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}=0$$

A continuación, desarrollamos el producto exterior teniendo en cuenta lo que vimos para la anterior ecuación:

$$dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\delta}=$$
$$=dx^{\mu}\otimes dx^{\gamma}\otimes dx^{\delta}+dx^{\gamma}\otimes dx^{\delta}\otimes dx^{\mu}+dx^{\delta}\otimes dx^{\mu}\otimes dx^{\gamma}-$$
$$-dx^{\gamma}\otimes dx^{\mu}\otimes dx^{\delta}-dx^{\delta}\otimes dx^{\gamma}\otimes dx^{\mu}-dx^{\mu}\otimes dx^{\delta}\otimes dx^{\gamma}$$

de forma que nos quedará:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu}+\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu}R^{\alpha}_{\beta\nu\delta}+\Gamma^{\nu}_{\delta\mu}R^{\alpha}_{\beta\gamma\nu}+R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma;\delta}+\Gamma^{\nu}_{\mu\delta}R^{\alpha}_{\beta\nu\gamma}+\Gamma^{\nu}_{\gamma\delta}R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}+$$

$$+R^{\alpha}_{\beta\delta\mu;\gamma} + \Gamma^{\nu}_{\delta\gamma} R^{\alpha}_{\beta\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\gamma} R^{\alpha}_{\beta\delta\nu} - R^{\alpha}_{\beta\mu\delta;\gamma} - \Gamma^{\nu}_{\mu\gamma} R^{\alpha}_{\beta\nu\delta} - \Gamma^{\nu}_{\delta\gamma} R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} -$$
$$-R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu;\delta} - \Gamma^{\nu}_{\gamma\delta} R^{\alpha}_{\beta\nu\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\delta} R^{\alpha}_{\beta\gamma\nu} - R^{\alpha}_{\beta\delta\gamma;\mu} - \Gamma^{\nu}_{\delta\mu} R^{\alpha}_{\beta\nu\gamma} - \Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} R^{\alpha}_{\beta\delta\nu} = 0$$

y usando la antisimetría del tensor curvatura bajo transposición de los dos últimos índices, nos queda:

$$2\big[R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu} + R^{\alpha}_{\beta\delta\mu;\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma;\delta} +$$
$$+R^{\alpha}_{\beta\nu\delta}\big(\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\gamma}\big) + R^{\alpha}_{\beta\gamma\nu}\big(\Gamma^{\nu}_{\delta\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\delta}\big) + R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}\big(\Gamma^{\nu}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\nu}_{\delta\gamma}\big)\big] = 0$$

Sustituyendo por las componentes del tensor de torsión, finalmente nos queda:

$$\big(R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu} + R^{\alpha}_{\beta\delta\mu;\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma;\delta} + R^{\alpha}_{\beta\nu\delta} T^{\nu}_{\mu\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\nu} T^{\nu}_{\mu\delta} + R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} T^{\nu}_{\delta\gamma}\big) dx^{\mu} \otimes dx^{\gamma} \otimes dx^{\delta} = 0$$

Además, si consideramos que la conexión es libre de torsión, entonces $T^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ y nos queda la Segunda Identidad de Bianchi tal y como la vimos anteriormente:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\mu} + R^{\alpha}_{\beta\delta\mu;\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\mu\gamma;\delta} = 0$$

A.8. Cálculo de la curvatura para distintas métricas

A.8.1. Superficie de la esfera

La 2-esfera en el espacio euclídeo se define como:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = a^2; a \in \mathbb{R}\}$$

donde hemos tomado como coordenadas las cartesianas, $\{x, y, z\}$. La métrica de $\mathbb{R}^3$ es

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

de manera que podremos escribir el tensor métrico como:

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

Como $\mathbb{R}^3$ es una variedad pseudo-riemanniana, $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ también lo será, con la métrica inducida por la métrica de $\mathbb{R}^3$. Para ver la forma del tensor métrico, pasamos a coordenadas polares, $\{r, \theta, \phi\}$:

$$x = r \sin\theta \cos\phi; \quad y = r \sin\theta \sin\phi; \quad z = r \cos\theta$$

Las bases coordenadas serán $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ y $\{dx, dy, dz\}$, pero podemos hacer la transformación de coordenadas para hallarlas en coordenadas polares. Tendremos en cuenta que como estamos trabajando con una esfera, $r = a \implies dr = 0$.

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\bar{\alpha}}} dx^{\bar{\alpha}} \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi = a\cos\theta\cos\phi d\theta - a\sin\theta\sin\phi d\phi \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi = a\cos\theta\sin\phi d\theta + a\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz = \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi = -a\sin\theta d\theta \end{cases}$$

Si sustituimos en la expresión del tensor métrico, llegamos a la siguiente expresión:

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta = a^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi) \implies g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

y la inversa será:

$$g^{-1} = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta = \frac{1}{a^2}\left(\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi \otimes \partial_\phi\right) \implies g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Si tomamos como bases:

$$\{e_\theta, e_\phi\} = \left\{\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}; \quad \{\varepsilon^\theta, \varepsilon^\phi\} = \left\{a d\theta, a\sin\theta d\phi\right\}$$

podremos escribir el tensor métrico y su inversa como:

$$g = \varepsilon^\theta \otimes \varepsilon^\theta + \varepsilon^\phi \otimes \varepsilon^\phi \implies g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = e_\theta \otimes e_\theta + e_\phi \otimes e_\phi \implies g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos las 1-formas teniendo en cuenta que en este sistema de coordenadas $dg_{\alpha\beta} = 0$:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \implies g_{\alpha\mu}\omega^{\mu}_{\beta} = -g_{\beta\nu}\omega^{\nu}_{\alpha} \implies g_{\alpha\alpha}\omega^{\alpha}_{\beta} = -g_{\beta\beta}\omega^{\beta}_{\alpha} \implies \omega^{\alpha}_{\beta} = -\omega^{\beta}_{\alpha}$$

Si $\alpha = \beta$, entonces $\omega^{\alpha}_{\alpha} = 0$. Veamos que pasa si $\alpha \neq \beta$. Usaremos las ecuaciones:

$$\omega^{\theta}_{\phi} = -\omega^{\phi}_{\theta}; \quad \tau^{\alpha} = d\varepsilon^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \varepsilon^{\beta} = 0$$

Entonces:

$$\begin{gathered} 0 = d\varepsilon^{\theta} + \omega^{\theta}_{\beta} \wedge \varepsilon^{\beta} = \omega^{\theta}_{\phi} \wedge \varepsilon^{\phi} \implies \omega^{\theta}_{\phi} = f(\theta,\phi)\varepsilon^{\phi} = a\sin\theta f(\theta,\phi)d\phi \\ 0 = d\varepsilon^{\phi} + \omega^{\phi}_{\beta} \wedge \varepsilon^{\beta} = d\varepsilon^{\phi} + \omega^{\phi}_{\theta} \wedge \varepsilon^{\theta} = (a\sin\theta)_{,\gamma}dx^{\gamma} \wedge d\phi - \omega^{\theta}_{\phi} \wedge \varepsilon^{\theta} \\ a\cos\theta d\theta \wedge d\phi = f(\theta,\phi)a^2\sin\theta d\phi \wedge d\theta = -f(\theta,\phi)a^2\sin\theta d\theta \wedge d\phi \implies f(\theta,\phi) = -\frac{1}{a}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{gathered}$$

De manera que obtenemos:

$$\omega^{\theta}_{\phi} = -\omega^{\phi}_{\theta} = -\frac{1}{a}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^{\phi} = -\cos\theta d\phi$$

Ahora, usamos la segunda ecuación de estructura de Cartan para hallar las 2-formas de la conexión:

$$\begin{gathered} \rho^{\theta}_{\theta} = d\omega^{\theta}_{\theta} + \omega^{\theta}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}_{\theta} = \omega^{\theta}_{\phi} \wedge \omega^{\phi}_{\theta} = 0 \\ \rho^{\theta}_{\phi} = d\omega^{\theta}_{\phi} + \omega^{\theta}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}_{\phi} = d\omega^{\theta}_{\phi} = (-\cos\theta)_{,\gamma}dx^{\gamma} \wedge d\phi = \sin\theta d\theta \wedge d\phi = \frac{1}{a^2}\varepsilon^{\theta} \wedge \varepsilon^{\phi} \\ \rho^{\phi}_{\theta} = d\omega^{\phi}_{\theta} + \omega^{\phi}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}_{\theta} = d\omega^{\phi}_{\theta} = (\cos\theta)_{,\gamma}dx^{\gamma} \wedge d\phi = -\sin\theta d\theta \wedge d\phi = -\frac{1}{a^2}\varepsilon^{\theta} \wedge \varepsilon^{\phi} \\ \rho^{\phi}_{\phi} = d\omega^{\phi}_{\phi} + \omega^{\phi}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}_{\phi} = \omega^{\phi}_{\theta} \wedge \omega^{\theta}_{\phi} = 0 \end{gathered}$$

A continuación, calculamos el tensor curvatura usando:

$$\rho^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\gamma} \wedge \epsilon^{\delta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\theta\phi}\varepsilon^{\theta} \wedge \epsilon^{\phi} + \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\phi\theta}\varepsilon^{\phi} \wedge \epsilon^{\theta} = R^{\alpha}_{\beta\theta\phi}\varepsilon^{\theta} \wedge \epsilon^{\phi} = -R^{\alpha}_{\beta\phi\theta}\varepsilon^{\theta} \wedge \epsilon^{\phi}$$

Se obtiene:

$$\rho^{\theta}_{\theta} = \rho^{\phi}_{\phi} = 0 \implies R^{\theta}_{\theta\theta\phi} = R^{\theta}_{\theta\phi\theta} = R^{\phi}_{\phi\theta\phi} = R^{\phi}_{\phi\phi\theta} = 0$$

$$\rho^\theta_\phi = R^\theta_{\phi\theta\phi}\varepsilon^\theta \wedge \epsilon^\phi = \frac{1}{a^2}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi \implies R^\theta_{\phi\theta\phi} = -R^\theta_{\phi\phi\theta} = \frac{1}{a^2}$$
$$\rho^\phi_\theta = R^\phi_{\theta\theta\phi}\varepsilon^\theta \wedge \epsilon^\phi = -\frac{1}{a^2}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi \implies R^\phi_{\theta\theta\phi} = -R^\phi_{\theta\phi\theta} = -\frac{1}{a^2}$$

Bajando el índice contravariante, hallamos las componentes no nulas del tensor de Riemann:

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = -R_{\theta\phi\phi\theta} = \frac{1}{a^2}; R_{\phi\theta\theta\phi} = -R_{\phi\theta\phi\theta} = -\frac{1}{a^2}$$

A.8.2. Espacio-tiempo estático y con simetría esférica

En las coordenadas $\{t, r, \theta, \phi\}$ podemos escribir la métrica de un espacio-tiempo estático y con simetría esférica como:

$$ds^2 = -e^{2A(r)}c^2dt^2 + e^{2B(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

siendo $A(r), B(r)$ dos funciones que tienden a 0 cuando $r \to \infty$. Como bases tomaremos:

$$\{\varepsilon^t, \varepsilon^r, \varepsilon^\theta, \varepsilon^\phi\} = \left\{ce^{A(r)}dt, e^{B(r)}dr, rd\theta, r\sin\theta d\phi\right\}$$
$$\{e_t, e_r, e_\theta, e_\phi\} = \left\{\frac{1}{c}e^{-A(r)}\partial_t, e^{-B(r)}\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\theta, \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\right\}$$

En estas bases, las coordenadas de la métrica pasan a ser $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, así que tendremos que $dg_{\alpha\beta} = 0 \implies \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$. Si $\alpha = \beta$ entonces $\omega_{\alpha\alpha} = 0$. Veamos que se obtiene para $\alpha \neq \beta$.

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \implies g_{\alpha\mu}\omega^\mu_\beta = -g_{\beta\nu}\omega^\nu_\alpha \implies g_{\alpha\alpha}\omega^\alpha_\beta = -g_{\beta\beta}\omega^\beta_\alpha$$

$$\omega^t_r = \omega^r_t; \quad \omega^t_\theta = \omega^\theta_t; \quad \omega^t_\phi = \omega^\phi_t$$
$$\omega^r_\theta = -\omega^\theta_r; \quad \omega^r_\phi = -\omega^\phi_r; \quad \omega^\theta_\phi = -\omega^\phi_\theta$$

Ahora, planteemos la primera ecuación de Cartan:

$$\tau^\alpha = d\varepsilon^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta \implies d\varepsilon^\alpha = -\omega^\alpha_\beta \wedge \varepsilon^\beta$$

tendremos:

$$
\begin{aligned}
d\varepsilon^t = -\omega^t_\beta \wedge \varepsilon^\beta &\implies -cA'e^A dt \wedge dr = -\omega^t_r \wedge \varepsilon^r - \omega^t_\theta \wedge \varepsilon^\theta - \omega^t_\phi \wedge \varepsilon^\phi \\
d\varepsilon^r = -\omega^r_\beta \wedge \varepsilon^\beta &\implies 0 = -\omega^r_t \wedge \varepsilon^t - \omega^r_\theta \wedge \varepsilon^\theta - \omega^r_\phi \wedge \varepsilon^\phi \\
d\varepsilon^\theta = -\omega^\theta_\beta \wedge \varepsilon^\beta &\implies dr \wedge d\theta = -\omega^\theta_t \wedge \varepsilon^t - \omega^\theta_r \wedge \varepsilon^r - \omega^\theta_\phi \wedge \varepsilon^\phi \\
d\varepsilon^\phi = -\omega^\phi_\beta \wedge \varepsilon^\beta &\implies \sin\theta dr \wedge d\phi + r\cos\theta d\theta \wedge d\phi = -\omega^\phi_t \wedge \varepsilon^t - \omega^\phi_r \wedge \varepsilon^r - \omega^\phi_\theta \wedge \varepsilon^\theta
\end{aligned}
$$

Esto lo podemos expresar en la base no coordenada como:

$$
\begin{aligned}
-A'e^{-B}\varepsilon^t \wedge \varepsilon^r &= -\omega^t_r \wedge \varepsilon^r - \omega^t_\theta \wedge \varepsilon^\theta - \omega^t_\phi \wedge \varepsilon^\phi \\
0 &= -\omega^r_t \wedge \varepsilon^t - \omega^r_\theta \wedge \varepsilon^\theta - \omega^r_\phi \wedge \varepsilon^\phi \\
\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\theta &= -\omega^\theta_t \wedge \varepsilon^t - \omega^\theta_r \wedge \varepsilon^r - \omega^\theta_\phi \wedge \varepsilon^\phi \\
\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\phi + \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi &= -\omega^\phi_t \wedge \varepsilon^t - \omega^\phi_r \wedge \varepsilon^r - \omega^\phi_\theta \wedge \varepsilon^\theta
\end{aligned}
$$

Como solución vamos a proponer:

$$
\omega^t_r = f^t_r \varepsilon^t; \quad \omega^t_\theta = \omega^t_\phi = 0; \quad \omega^\theta_r = f^\theta_r \varepsilon^\theta; \quad \omega^\phi_r = f^\phi_r \varepsilon^\phi; \quad \omega^\phi_\theta = f^\phi_\theta \varepsilon^\phi
$$

Veamos que en efecto es la solución, y calculemos las componentes de las 1-formas.

$$
\begin{aligned}
-A'e^{-B}\varepsilon^t \wedge \varepsilon^r = -f^t_r \varepsilon^t \wedge \varepsilon^r &\implies f^t_r = A'e^{-B} \\
0 = \omega^t_r \wedge \varepsilon^t + \omega^\theta_r \wedge \varepsilon^\theta - \omega^\phi_r \wedge \varepsilon^\phi& \\
\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\theta = -f^\theta_r \varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^r &\implies f^\theta_r = \frac{1}{r}e^{-B} \\
\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\phi + \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi = -f^\phi_r \varepsilon^\phi \wedge \varepsilon^r - f^\phi_\theta \varepsilon^\phi \wedge \varepsilon^\theta &\implies f^\phi_r = \frac{1}{r}e^{-B}; \quad f^\phi_\theta = \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

Por tanto, como la solución a estas ecuaciones es única y la solución propuesta cumple las ecuaciones, las 1-formas de la conexión no nulas con $\alpha \neq \beta$ serán:

$$
\begin{aligned}
\omega^t_r = \omega^r_t = A'e^{-B}\varepsilon^t; \quad \omega^r_\theta = -\omega^\theta_r = -\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^\theta \\
\omega^r_\phi = -\omega^\phi_r = -\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^\phi; \quad \omega^\theta_\phi = -\omega^\phi_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^\phi
\end{aligned}
$$

A continuación, usamos la segunda ecuación de Cartan para hallar las 2-formas de la conexión:

$$\rho^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta$$

Si $\alpha = \beta$, entonces $\rho^\alpha_\alpha = d\omega^\alpha_\alpha + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\alpha = 0$, ya que ω^α_γ es proporcinal a ω^γ_α y $\omega^\alpha_\alpha = 0$.

Para el resto de coordenadas tendremos que usar la siguiente propiedad de la diferencial exterior. Sea f una función escalar y ω una 1-forma, se tiene:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + fd\omega$$

Entonces, para $\alpha \neq \beta$ se tiene:

$$\rho^t_r = d\omega^r_t + \omega^r_\gamma \wedge \omega^\gamma_t = d\omega^r_t = (A''e^{-B} - A'B'e^{-B})e^{-B}\varepsilon^r \wedge \varepsilon^t + (A'e^{-B})^2\varepsilon^r \wedge \varepsilon^t = C\varepsilon^r \wedge \varepsilon^t$$

$$\rho^t_\theta = d\omega^t_\theta + \omega^t_\gamma \wedge \omega^\gamma_\theta = \omega^t_r \wedge \omega^r_\theta = -\frac{1}{r}A'e^{-2B}\varepsilon^t \wedge \varepsilon^\theta = -\frac{A'}{r}D\varepsilon^t \wedge \varepsilon^\theta$$

$$\rho^t_\phi = d\omega^t_\phi + \omega^t_\gamma \wedge \omega^\gamma_\phi = \omega^t_r \wedge \omega^r_\phi = -\frac{1}{r}A'e^{-2B}\varepsilon^t \wedge \varepsilon^\phi = -\frac{A'}{r}D\varepsilon^t \wedge \varepsilon^\phi$$

$$\rho^r_t = d\omega^r_t + \omega^r_\gamma \wedge \omega^\gamma_t = d\omega^r_t = d\omega^t_r = \rho^t_r$$

$$\rho^r_\theta = d\omega^r_\theta + \omega^r_\gamma \wedge \omega^\gamma_\theta = d\omega^r_\theta = \left(\frac{1}{r^2}e^{-B} + \frac{B'}{r}e^{-B}\right)dx^r \wedge \varepsilon^\theta - \frac{1}{r}e^{-B}dx^r \wedge dx^\theta =$$

$$= \left(\frac{1}{r^2}e^{-B} + \frac{-B'}{r}e^{-B}\right)e^{-B}\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\theta - \frac{1}{r^2}e^{-2B}\varepsilon^r \wedge d\varepsilon^\theta = \frac{B'}{r}D\varepsilon^r \wedge d\varepsilon^\theta$$

$$\rho^r_\phi = d\omega^r_\phi + \omega^r_\gamma \wedge \omega^\gamma_\phi = d\omega^r_\phi + \omega^r_\theta \wedge \omega^\theta_\phi =$$

$$= \left(\frac{1}{r^2}e^{-B} + \frac{B'}{r}e^{-B}\right)dx^r \wedge \varepsilon^\phi - \frac{1}{r}e^{-B}\bigg(\sin\theta dx^r \wedge dx^\phi + r\cos\theta d\theta \wedge d\phi\bigg) +$$

$$+\frac{1}{r}e^{-B}\varepsilon^\theta \wedge \left(\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^\phi\right) =$$

$$= e^{-2B}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{B'}{r}\right)\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\phi - \frac{1}{r^2}e^{-B}\left(e^{-B}\varepsilon^r \wedge d\varepsilon^\phi + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi\right) + \frac{1}{r^2}e^{-B}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi =$$

$$= D\frac{B'}{r}\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\phi$$

$$\rho^\theta_t = d\omega^\theta_t + \omega^\theta_\gamma \wedge \omega^\gamma_t = \omega^\theta_r \wedge \omega^r_t = -\omega^r_\theta \wedge \omega^t_r = \omega^t_r \wedge \omega^r_\theta = \rho^t_\theta$$

$$\rho^\theta_r = d\omega^\theta_r + \omega^\theta_\gamma \wedge \omega^\gamma_r = -d\omega^r_\theta = -\rho^r_\theta$$

$$\rho^\theta_\phi = d\omega^\theta_\phi + \omega^\theta_\gamma \wedge \omega^\gamma_\phi = d\omega^\theta_\phi + \omega^\theta_r \wedge \omega^r_\phi =$$

$$= \frac{1}{r^2}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi - \frac{1}{r^2}e^{-2B}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi = \frac{1-D}{r^2}\varepsilon^\theta \wedge \varepsilon^\phi$$

$$\rho^\phi_t = d\omega^\phi_t + \omega^\phi_\gamma \wedge \omega^\gamma_t = \omega^\phi_r \wedge \omega^r_t = -\omega^r_\phi \wedge \omega^t_r = \omega^t_r \wedge \omega^r_\phi = \rho^t_\phi$$
$$\rho^\phi_r = d\omega^\phi_r + \omega^\phi_\gamma \wedge \omega^\gamma_r = -d\omega^r_\phi - \omega^r_\theta \wedge \omega^\theta_\phi = -\rho^r_\phi$$
$$\rho^\phi_\theta = d\omega^\phi_\theta + \omega^\phi_\gamma \wedge \omega^\gamma_\theta = -d\omega^\theta_\phi - \omega^r_\gamma \wedge \omega^r_\phi = -\rho^\theta_\phi$$

con $C = (A'' - A'B' + A')D$ y $D = e^{-2B}$.

Para hallar el tensor de Ricci, usamos:

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} = \rho^\mu_\alpha(e_\mu, e_\beta) \tag{7}$$

Como en nuestro caso $\rho^\mu_\alpha = f\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\alpha$, tendremos:

$$R_{\alpha\beta} = \rho^\mu_\alpha(e_\mu, e_\beta) = f\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\alpha(e_\mu, e_\beta) = f\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\alpha(e_\mu, e_\alpha) \tag{8}$$

así que sólo serán no nulas las componentes de la diagonal.

$$R_{tt} = \rho^\mu_t(e_\mu, e_t) = \rho^r_t(e_r, e_t) + \rho^\theta_t(e_\theta, e_t) + \rho^\phi_t(e_\phi, e_t) = C + \frac{A'}{r}D + \frac{A'}{r}D = C + 2D\frac{A'}{r}$$
$$R_{rr} = \rho^\mu_r(e_\mu, e_r) = \rho^t_r(e_t, e_r) + \rho^\theta_r(e_\theta, e_r) + \rho^\phi_r(e_\phi, e_r) = -C + D\frac{B'}{r} + D\frac{B'}{r} = -C + 2D\frac{B'}{r}$$
$$R_{\theta\theta} = \rho^\mu_\theta(e_\mu, e_\theta) = \rho^t_\theta(e_t, e_\theta) + \rho^r_\theta(e_r, e_\theta) + \rho^\phi_\theta(e_\phi, e_\theta) = -\frac{A'}{r}D + \frac{B'}{r}D + \frac{1-D}{r^2} =$$
$$= \frac{B' - A'}{r}D + \frac{1-D}{r^2}$$
$$R_{\phi\phi} = \rho^\mu_\phi(e_\mu, e_\phi) = \rho^t_\phi(e_t, e_\phi) + \rho^r_\phi(e_r, e_\phi) + \rho^\theta_\phi(e_\theta, e_\phi) = -\frac{A'}{r}D + D\frac{B'}{r} + \frac{1-D}{r^2} =$$
$$= \frac{B' - A'}{r}D + \frac{1-D}{r^2}$$

Referencias

[1] Bartelmann, M. (2019). *General Relativity.* Heidelberg University Publishing.

[2] Lee, J. M. (2013). *Introduction to smooth manifolds.* (2ª ed.) Graduate Texts in Mathematics. Springer Publishing, New York.

[3] Lee, J. M. (2019). *Introduction to Riemannian Manifolds.* (2ª ed.) Graduate Texts in Mathematics. Springer Publishing, New York.

[4] Schutz, B. F. (1980). *Geometrical methods of mathematical physics.* (Illustrated ed.) Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Straumann, N. (2013). *General Relativity* (2 ed.) Graduate Texts in Physics. Springer Publishing, New York.

[6] Szekeres, P. (2005). *A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space and Differential Geometry* (1ª ed.). Cambridge University Press, Cambridge.